Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 10 maart 2023

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. 231 We kunnen zowel de teller als de noemer van de breuk factoriseren in priemgetallen. Factoren die zowel in de teller als noemer voorkomen, vallen tegen elkaar weg. Wat overblijft, is de vereenvoudigde vorm voor de breuk. De priemfactoren die kunnen voorkomen zijn 2, 3, 5, 7 en 11. Voor elk van deze priemgetallen houden we bij hoe vaak die voorkomt als priemfactor in de getallen 1 tot en met 12. Als een priemgetal een oneven aantal keer voorkomt, kunnen de factoren niet allemaal tegen elkaar wegvallen en moet de priemfactor voorkomen in het kleinst mogelijke gehele getal dat we zoeken.

De priemgetallen 7 en 11 komen maar één keer voor, namelijk in de getallen 7 en 11 zelf. Het priemgetal 5 komt twee keer voor: één keer als 5 en één keer als factor van het getal 10. Het priemgetal 3 komt vijf keer voor: één keer als factor in de getallen 3, 6 en 12 en twee keer als factor in het getal 9. Het priemgetal 2 komt tien keer voor: één keer als factor in de getallen 2, 6 en 10, twee keer als factor in de getallen 4 en 12 en drie keer als factor in het getal 8.

We zien dus dat het gehele getal dat we zoeken in ieder geval factoren 3, 7 en 11 moet hebben en dus minstens $3 \times 7 \times 11 = 231$ moet zijn. Dit blijkt ook te lukken, namelijk zo:

$$\frac{4 \times 7 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 8}.$$

B2. $6\sqrt{2} - 6$ We bekijken eerst driehoek BRQ. Die driehoek is gelijkbenig, omdat QR evenwijdig is met de diagonaal AC van het vierkant. Bovendien geldt dat $|QR| = 6$. Met de stelling van Pythagoras vinden we dus dat $2|BQ|^2 = |BQ|^2 + |BR|^2 = |QR|^2 = 36$. We vinden dus dat $|BQ|^2 = 18$ en $|BQ| = 3\sqrt{2}$. Evenzo vinden we dat $|DP| = 3\sqrt{2}$. Daaruit volgt vervolgens dat $|AQ| = 6 - |BQ| = 6 - 3\sqrt{2}$ en net zo $|AP| = 6 - 3\sqrt{2}$. De stelling van Pythagoras geeft nu dat $|PQ|^2 = |AP|^2 + |AQ|^2 = 2(6 - 3\sqrt{2})^2$ en dus $|PQ| = \sqrt{2} \cdot (6 - 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 6$. Aangezien $ABFE$ en $PSRQ$ gelijke afmetingen hebben, is dat ook de lengte van AE.

B3. 20406080 Het is duidelijk dat n minstens 12345678 moet zijn. Om een zo klein mogelijke n te vinden, proberen we het eerst met achtcijferige getallen. Schrijf n als $\overline{\texttt{abcdefgh}}$, het getal met de cijfers $\texttt{a}, \ldots, \texttt{h}$. De kreeft van n is dan $k = \overline{\texttt{hgfedcba}}$ en $n - k = 12345678$.

$$\begin{array}{l} \texttt{abcdefgh} \\ \underline{\texttt{hgfedcba}} - \\ \texttt{12345678} \end{array}$$

De kleinst mogelijke n krijgen we door het eerste cijfer zo klein mogelijk te nemen. We proberen $\texttt{a} = 1$. Als we dan kijken naar het eerste cijfer van $n - k$, zien we dat $\texttt{h} = 0$ moet gelden, maar dan is het laatste cijfer van $n - k$ gelijk aan 9 en dat klopt niet. We zien dus dat $\texttt{a} \geqslant 2$ moet gelden.

We nemen $\texttt{a} = 2$ en voor het tweede cijfer proberen we een zo klein mogelijk cijfer: $\texttt{b} = 0$. Door naar de laatste twee cijfers van $n - k$ te kijken, zien we dat $\texttt{g} = 8$ en $\texttt{h} = 0$ moeten gelden. Tot nu toe hebben we dus

$$\begin{array}{l} \texttt{20cdef80} \\ \underline{\texttt{08fedc02}} - \\ \texttt{12345678} \end{array}$$

Omdat de eerste en laatste twee cijfers al kloppen, zolang er niets geleend hoeft te worden van het tweede cijfer, gaan we nu op zoek naar $\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}$ en $\mathtt{f}$ zodat $\overline{\mathtt{cdef}} - \overline{\mathtt{fedc}} = 3456$.

De kleinst mogelijke $\mathtt{c}$ die we nu kunnen kiezen is $\mathtt{c} = 3$. Als we dat doen, vinden we $\mathtt{f} = 0$ door naar het derde cijfer van $n - k$ te kijken. Het zesde cijfer van $n - k$ wordt dan een 7 en dat klopt niet. We zien dus dat $\mathtt{c} \geqslant 4$ moet gelden.

We nemen $\mathtt{c} = 4$ en de kleinst mogelijke $\mathtt{d}$, namelijk $\mathtt{d} = 0$. Door naar het vijfde en zesde cijfer van $n - k$ te kijken, vinden we dat $\mathtt{e} = 6$ en $\mathtt{f} = 0$ moet gelden. We vinden nu de oplossing $n = 20406080$ die inderdaad voldoet, aangezien $20406080 - 8060402 = 12345678$.

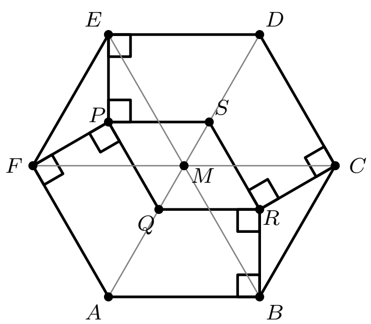
B4. 9 Laat a, b en c de cijfers van n zijn; dat wil zeggen $n = 100a + 10b + c$. Dan is het aantal deelnemernummers van 1 t/m n dat op een 5 eindigt gelijk aan $10a + b$ als $c < 5$ en gelijk aan $10a + b + 1$ als $c \geqslant 5$. Het getal gevormd door de laatste twee cijfers van n is $10b + c$.

Bekijk eerst het geval $c < 5$. Dan moet $10a+b$ gelijk zijn aan $10b+c$. Dat zijn allebei tweecijferige getallen, de een met cijfers a en b, de ander met cijfers b en c. We vinden dat $a = b = c \neq 0$ en we krijgen dus de oplossingen $n = 111, 222, 333, 444$.

Het geval $c \geqslant 5$ is iets ingewikkelder. Het getal $10a + b + 1$ moet gelijk zijn aan $10b + c$. Als $b < 9$, dan zijn de cijfers van $10a + b + 1$ precies a en $b + 1$ en vinden we $a = b$ en $b + 1 = c$. Dit geeft de oplossingen $n = 445, 556, 667, 778, 889$. Als $b = 9$, dan krijgen we $10a + 10 = 90 + c$. Hieruit volgt dat $c = 0$ moet gelden en dat is in tegenspraak met $c \geqslant 5$.

In totaal hebben we 9 mogelijke waarden voor n gevonden.

B5. $\frac{8}{9}$ Merk allereerst op dat vierhoek $PQRS$ een parallellogram is, omdat de overliggende zijdes parallel zijn. PS is bijvoorbeeld evenwijdig aan ED, vanwege de rechte U-hoeken bij E en P. Eenzelfde redenering geeft dat SR evenwijdig is aan DC, QR evenwijdig aan AB (en dus aan ED), en PQ evenwijdig aan FA (en dus aan DC).



We tekenen als hulplijnen in het plaatje hiernaast de drie diagonalen van de zeshoek. Deze verdelen de zeshoek in zes grote gelijkzijdige driehoeken met oppervlakte 1. Het middelpunt van de zeshoek noemen we M. Omdat AD een symmetrie-as van de figuur is, liggen Q en S op de diagonaal AD. Vanwege evenwijdigheid delen de diagonalen BE en CF het parallellogram $PQRS$ in vier kleine parallellogrammen die elk $\frac{1}{4}$ van de oppervlakte van $PQRS$ hebben. We zien ook dat zo'n klein parallellogram twee keer de oppervlakte heeft van een klein gelijkzijdig driehoekje.

De grootte van zo'n driehoekje kunnen we als volgt vinden. Driehoek BCM bestaat uit drie kleinere driehoeken met gelijke afmetingen: BCR, CMR en BMR. Die kleine gelijkbenige driehoeken hebben elk dus oppervlakte $\frac{1}{3}$. De hoogte van het punt R ten opzichte van basis CM is dus precies $\frac{1}{3}$ van de totale hoogte van de driehoek. Vanwege evenwijdigheid, ligt punt Q dus ook op $\frac{1}{3}$ van de zijde MA vanuit M gezien. Het kleine driehoekje met zijde QM heeft dus oppervlakte $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ van de oppervlakte van de grote gelijkzijdige driehoek; dat is dus oppervlakte $\frac{1}{9}$. Hieruit volgt dat het parallellogram $PQRS$ oppervlakte $8 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ heeft.

C-opgaven

C1. *We gaan het probleem eerst bekijken voor een kleiner aantal blokken met opeenvolgende getallen. Met 1 blok is er maar 1 toren mogelijk. Met 2 blokken zijn zowel de torens (boven) 1–2 (onder) als 2–1 mogelijk. Met 3 blokken zijn dit de mogelijke torens: 1–2–3, 2–1–3, 1–3–2 en 3–2–1. Met 4 blokken zijn dit de mogelijke torens:*

$$\begin{array}{llll} 1-2-3-4, & 1-2-4-3, & 2-1-3-4, & 2-1-4-3, \\ 1-3-2-4, & 1-4-3-2, & 3-2-1-4, & 4-3-2-1. \end{array}$$

Het lijkt erop dat het aantal torens telkens verdubbelt. We gaan dit bewijzen. Gegeven een toren van $n > 1$ blokken, bekijk het blok met het hoogste nummer, n. Als dit blok op een ander blok ligt, moet dat wel een blok met een lager nummer zijn (want er is geen blok met een hoger nummer), dus moet het volgens de voorwaarde wel op het blok met nummer $n-1$ liggen. Blok n ligt dus ofwel onderop, danwel direct boven blok $n-1$. Omdat alle andere blokken ook bovenop blok $n-1$ kunnen liggen, zien we dat als we blok n weglaten, er een geldige toren met $n-1$ blokken overblijft.

Nu willen we laten zien dat we uit een willekeurige (geldige) toren met $n-1$ blokken ook weer een toren met n blokken kunnen maken. In elke willekeurige (geldige) toren met $n-1$ blokken kunnen we blok n ofwel onderop invoegen danwel bovenop blok $n-1$; andere plekken zijn niet mogelijk en op deze manier ligt blok n nooit op een blok met een te klein nummer. In beide gevallen wordt de toren van n blokken nu een geldige toren, omdat bovenop blok n elk ander blok kan liggen. Uit elke willekeurige geldige toren met $n-1$ blokken ontstaan dus twee geldige torens met n blokken.

We zien dus dat het aantal torens inderdaad telkens verdubbelt. Voor $n = 1$ is er $1 = 2^0$ toren, voor $n = 2$ zijn er $2 = 2^1$ torens en in het algemeen zijn er 2^{n-1} torens. Het aantal torens met 10 blokken is dus $2^9 = 512$.

C2. (a) Stel dat de twee positieve gehele getallen $n-10$ en $n+10$ zijn en dus $n > 10$. Dan is het product gelijk aan $(n-10)(n+10) = n^2 - 100$ en zoeken we een $n > 10$ zodat $n^2 - 100 + 23$ op de cijfers 23 eindigt. Maar dat betekent dat we willen dat n^2 op de cijfers 00 eindigt. Met andere woorden, we willen dat n^2 deelbaar is door 100 en n dus deelbaar door 10. De kleinst mogelijke oplossing is $n = 20$ en we zien dat $10 \cdot 30 + 23 = 323$ inderdaad op 23 eindigt. De kleinst mogelijke uitkomst is dus 323.

(b) We nemen weer de getallen $n-10$ en $n+10$. Nu zoeken we een oplossing voor $n^2 - 100 + 23 = k^2$ voor een zeker geheel getal k, oftewel $n^2 = k^2 + 77$. Het verschil tussen twee opeenvolgende kwadraten is een oneven getal en dat wordt steeds 2 groter. Er geldt dat $1^2 - 0^2 = 1$, $2^2 - 1^2 = 3$, $3^2 - 2^2 = 5$, enzovoorts. In het algemeen: $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$. We kunnen 77 dan krijgen door $m = \frac{76}{2} = 38$ te nemen en dus $k = 38$ en $n = 39$. We zien dat inderdaad geldt dat $29 \cdot 49 + 23 = 1444 = 38^2$. Het blijkt dus mogelijk te zijn dat de uitkomst een kwadraat is. *Het blijkt dat dit de enige oplossing is, maar dat wordt niet gevraagd in de opgave.*