Hints en Tips!!

NEDERLANDSE
WISKUNDE
OLYMPIADE

IMO2011

Inhoudsopgave

- Inleiding 3
- Spelmateriaal 4
- Spelgebruik 5
- Voorkennis 6

Hints 7

- Cijfers en Getallen 8
- Figuren 11
- Raadsel 14
- Tellen en Letters 16
- Verrassing 18

Inleiding

In 2011 bestaat de Nederlandse Wiskunde Olympiade 50 jaar. Bovendien vindt in juli 2011 voor het eerst in de geschiedenis de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) in Nederland plaats. Reden genoeg voor een feestje. Viert u het mee met dit nieuwe puzzelspel?

Het spel bevat alle A-opgaven van de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade van de jaren 2000 tot en met 2010. De opgaven zijn op onderwerp ingedeeld en op handige kaarten gezet.

Zijn uw leerlingen enthousiast? Doe dan bij u op school mee met de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, elk jaar eind januari of begin februari.
Meer informatie via www.wiskundeolympiade.nl.

Naar een idee van:
- Mariken Barents,
  docent aan het Gemeentelijk Gymnasium Hilversum

Redactie:
- Mariken Barents
- Birgit van Dalen
- Quintijn Puite
- Henk-Jaap Wagenaar

Ontwerp:
- Ad van den Broek

Druk:
- ID Premiums

Spelmateriaal

- 70 opgavenkaarten
- boekje met inleiding en hints
- boekje met uitwerkingen
- antwoordenkaart
- stempelkaart om zelf te kopiëren
- stempel en stempelkussen

Spelgebruik

Met dit spel kunnen leerlingen aan de slag met uitdagende opgaven die komen uit de eerste rondes van de Nederlandse Wiskunde Olympiade van de afgelopen jaren. Er zijn diverse spelvormen denkbaar.

Solo

Leerlingen die in de les eerder klaar zijn, kunnen een puzzelkaart uitzoeken. Elke leerling heeft een stempelkaart en elke goede oplossing levert een stempel op. Als een leerling vastloopt, zijn er hints op diverse niveaus beschikbaar in dit hintsboekje. Aan het eind van het jaar kan er bijvoorbeeld een prijs beschikbaar zijn voor de leerling met de meeste stempels.

Clinic

U gebruikt een deel van de les om met de klas één categorie te behandelen. Dit kan aansluiten op de lesstof. Vorm groepjes van drie à vier leerlingen en geef een stempelkaart per groep. De groepjes krijgen elk een opgave uit die categorie. Een goede oplossing levert een stempel op en vervolgens krijgt het groepje een nieuwe opgave mee. Als een groepje vastloopt op een opgave, zijn er hints op diverse niveaus beschikbaar in dit hintsboekje.

Toptalent

Met de wiskundesectie benadert u een aantal leerlingen uit verschillende klassen voor een Topklas Wiskunde, die bijvoorbeeld op een aantal vrijdagmiddagen plaatsvindt. Het doel kan zijn om deze leerlingen goed voor te bereiden op de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade. Bij een bijeenkomst staat één categorie centraal en maken de leerlingen puzzelkaarten in die categorie. Ze hebben elk een stempelkaart waar hun juiste antwoorden op bijgehouden worden. Eventueel werken de leerlingen in groepjes. Als een leerling vastloopt, zijn er hints op diverse niveaus beschikbaar in dit hintsboekje.

Voorkennis

Het spel is geschikt voor alle leerlingen in het havo/vwo. Bij sommige opgaven is er wel iets meer voorkennis vereist dan bij andere opgaven, in het bijzonder over:

- kwadraten en wortels
- de som van de hoeken van een driehoek
- eigenschappen van gelijkbenige en gelijkzijdige driehoek
- oppervlakte en omtrek van rechthoek, driehoek en cirkel
- stelling van Pythagoras

Bij elke opgave zijn er hints, van een kleine tip tot een zeer concrete aanwijzing. De leerling kan na de eerste hint zelf weer verder gaan werken. Pas na een bepaalde tijd (eventueel vooraf afgesproken) mag hij of zij een volgende hint vragen.

Hints

CIJFERS & GETALLEN

C1

1 Maak eens een paar voorbeelden van getallen van twee cijfers en de som ervan.
2 Bedenk welke kwadraten de som kunnen zijn voor de getallen van 10 tot en met 99.
3 Schrijf een getal als $10a + b$ met a en b de cijfers van het getal.

C2

1 Maak eens zo'n getal dat de som is van zeven verschillende getallen.
2 Bepaal wat de kleinste som is die te maken is met zeven van de tien gegeven cijfers.
3 Bepaal wat de grootste som is die te maken is met zeven van de tien gegeven cijfers.

C3

1 Zorg dat de breuken beter te vergelijken zijn: denk daarbij aan de noemer.
2 Maak de noemers van alle breuken ongeveer 100.

C4

1 Probeer een getal te vinden waarvoor het geldt.
2 Hoeveel getallen kleiner dan 100 zijn er waarvoor het geldt? En tussen 100 en 200?

C5

1 Maak eens een voorbeeld van zulke getallen van drie cijfers en bepaal de som.
2 Zorg dat het middelste cijfer steeds het grootste is.
3 Welke cijfers tellen het zwaarste bij het nemen van de som?

C6

1 Maak eens een paar voorbeelden van getallen van twee cijfers, het omgekeerde en het verschil ervan.
2 Bedenk welke kwadraten het verschil kunnen zijn voor de getallen van 10 tot en met 99.
3 Schrijf een getal als $10a + b$ met a en b de cijfers van het getal.

C7

1 Begin klein: vermenigvuldig 11 met 2007, vervolgens 111, enzovoorts.
2 Ga door tot je een regelmaat ziet ontstaan.

C8

1 Bedenk wat de n is bij het voorbeeld in de opgave.
2 Ga na uit hoeveel cijfers het getal met 1 tot en met 10, 1 tot en met 19 en 1 tot en met 99 bestaat.
3 Ga na wat de regelmaat is en of/wanneer deze verandert.

C9

1 Schrijf eens de tafel van 6 uit.
2 Welke getallen uit de tafel van 6 eindigen op een 4?
3 Hoeveel getallen van 5 cijfers zijn er?

C10

1 Het gaat alleen om het laatste cijfer.
2 Werk de haakjes weg om te weten om hoeveel zevens het gaat.
3 Begin met $7 \times 7 = 7^2$ en ga door met vermenigvuldigen met 7 om de regelmaat te vinden.

C11

1 Begrijp wat er staat, maak voorbeelden voor jezelf.
2 Bekijk waar je voor moet zorgen zodat het verschil klein(er) wordt.

C12

1 Ga na hoeveel enen er in 99 + 999 zitten.
En in 99 + 999 + 9999?
2 Ga door met getallen van negens erbij optellen tot je de regelmaat ziet.

C13

1 Het gaat alleen om het laatste cijfer.
2 Ga door met de rij tot je de regelmaat ziet.

C14

1 Vervang $(\sqrt{2} + 1)^7$ door a en $(\sqrt{2} - 1)^7$ door b.
2 Schrijf uit in termen van a en b.
3 $x^7y^7 = (xy)^7$.

FIGUREN

F1
1 Een tekening is hier heel belangrijk.
2 Bouw de tekening op: begin met twee cirkels die zoveel mogelijk snijpunten hebben.

F2
1 Teken een of meer geschikte hulplijnen.
2 Noem *M* het middelpunt van de zeshoek en trek de lijnstukken *MA*, *MC* en *ME*. Trek ook lijnstuk *CE*.

F3
1 Welke lengtes kun je al berekenen?
2 Trek de lijn door *S* evenwijdig aan *AB* als hulplijn.

F4
1 Hoe lang is de schuine zijde?
2 Als je die driehoeken anders aan elkaar plakt, wat krijg je dan?
3 Neem de tekening over en geef alles aan wat je weet, ook de hoeken.
4 Bedenk hoe je de oppervlakte gaat bepalen (ook als je nog niet alles weet).

F5
1 Probeer eens een hulplijn.
2 Denk aan de 3-4-5-driehoek.
3 Een gelijkbenige driehoek heeft een symmetrieas.

F6
1 Hoe kun je de figuur opsplitsen om de oppervlakte te berekenen?
2 Hoek groot is de hoek tussen een 'punt' en een zijde van het vierkant?
3 Voer de letter *x* in voor een lengte die heel vaak voorkomt.

F7

1 Het gaat om een vierkant: schrijf alles op in de tekening wat je weet.
2 Bepaal wat je moet weten om de oppervlakte te kunnen berekenen.
3 Teken als hulplijn de verticale lijn door *H*.
4 Denk aan een kruistabel/verhoudingstabel.

F8

1 Een goede tekening is erg belangrijk (een passer kan helpen).
2 Teken eens een kwart van de cirkel.
3 Welke roosterpunten liggen op de cirkel?

F9

1 Neem de tekening over en geef alles aan wat je weet.
2 Wat zijn de afmetingen van het vierkant?
3 Kijk eens naar een kwart van de tekening.
4 Noem de gevraagde lengte *x*.

F10

1 Gebruik doorsnedes zodat je in een plat vlak kan tekenen en rekenen.
2 Denk aan de 1-1-$\sqrt{2}$-driehoek.
3 Geef de ribbe van de kubus de letter *x*.

F11

1 Teken de figuur waar je de oppervlakte van moet berekenen.
2 Gebruik hulplijnen om de figuur op te splitsen in andere figuren waar je de oppervlakte van kan berekenen.
3 Wat krijg je als je de vierkantjes weglaat?

F12

1 Als twee cirkels elkaar raken, dan ligt het raakpunt op de lijn door de twee middelpunten.
2 Maak een driehoek met als hoekpunten de middelpunten van de drie kleine cirkels.
3 Noem de straal van de kleinste cirkel x.
4 Denk aan de stelling van Pythagoras.
5 Hoe zie je de straal 2 van de grote cirkel nu nog een keer terug in je plaatje? Stel een vergelijking op.

F13

1 Gebruik hulplijnen die voor rechthoekige driehoeken zorgen.
2 Bereken de hoeken.
3 Denk aan de $1-\sqrt{3}-2$-driehoek.

F14

1 Een goede tekening is erg belangrijk (een passer kan helpen).
2 Er zijn twee gelijkbenige driehoeken.

RAADSELS

R1
1 Schrijf eens in tabelvorm op wat je allemaal weet.

R2
1 Bekijk of het klopt als Arie er één naast zit.

R3
1 Probeer eerst eens de getallen zo in te vullen dat de som van getallen op elke zijde gelijk is.
2 De hoekpunten zijn belangrijk: die komen in twee optelsommen voor.

R4
1 Op 20 van de 26 munten minstens 1 munt van 1 cent: hoeveel munten van 1 cent zijn er dan?

R5
1 De tweede dobbelsteen heeft alleen even getallen.
2 Bedenk wat er voor de drie getallen geldt als de som ervan oneven is.
3 De kans kan je uitdrukken in aantal keren som oneven gedeeld door totaal aantal mogelijkheden.

R6
1 Verhoudingen mag je vermenigvuldigen, maar dan wel alle getallen.

R7
1 Vul eens in op drie verschillende manieren.
2 Zet de drie verschillende manieren op volgorde van hoog naar laag.
3 Het middelste getal in de bovenste rij wordt twee keer geteld.

R8
1 Bekijk eens hoeveel de auto daadwerkelijk heeft gereden bij een stand van 10, 50 en 100.

R9

1 Geef de vier lege vakjes een letter: *A*, *B*, *C* en *D*.
2 Je kunt het getal in het midden berekenen.
3 De som van de linkerkolom en van de diagonaal van linksboven naar rechtsonder moeten gelijk zijn.

R10

1 Een kwestie van de rondes uitschrijven, hopelijk zie je een regelmaat.

R11

1 Snelheid is uit te drukken in afstand gedeeld door tijd.
2 Als je 7 minuten wandelt, kan je dat in 1 minuut op de fiets doen.
3 Bedenk wat er minstens moet gebeuren als je teruggaat om de fiets te halen.
4 Noem de afstand tot school *x* en druk beide manieren uit in *x*.

R12

1 Geef alle lege vakjes een letter: *A*, *B*, ..., *F*.
2 Je kunt het getal in het midden berekenen.
3 De som van de diagonaal van linksonder naar rechtsboven moet gelijk zijn aan de som van de onderste rij.

R13

1 Je moet precies 2000 halen. Wat moet de laatste zet geweest zijn?
2 En wat moet nu de voorlaatste zet geweest zijn?

R14

1 Kijk wat er verandert als je Jan in de rechthoek naar een andere rij verplaatst.
2 Hoe kun je de rechthoek zo maken dat Jan in de rij zover mogelijk naar links staat? En naar rechts?
3 Hoe kun je de rechthoek zo maken dat Piet in de rij zover mogelijk naar links staat? En naar rechts?
4 Van hoeveel mensen weet je zeker dat ze korter zijn dan Jan? Hoeveel zijn er zeker langer?

TELLEN & LETTERS

T1
1 Een tegel met alleen maar wit is ook mogelijk.
2 Voeg een kleur toe en bepaal het aantal mogelijke tegels.
3 Ga zo verder, zo overzichtelijk mogelijk.

T2
1 Zorg dat je niet een driehoek meerdere keren meetelt.
2 De kunst is om overzichtelijk per punt na te gaan hoeveel driehoeken er te maken zijn.

T3
1 Stel $a = (x^2 - 2)^2 - 5$, dan is $a^2 = 1$.
2 Zo kan je $x^2 - 2$ vervangen door b.

T4
1 Een armband met kralen van één kleur is ook mogelijk.
2 Begin met volledig één kleur en vervang één kraal door een andere kleur.

T5
1 Bedenk dat $9 = 3^2$.
2 Er staat drie keer hetzelfde, zo is $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$.

T6
1 Op hoeveel manieren kun je de G-blokjes neerleggen?
2 Als de G-blokjes vastliggen, hoeveel manieren heb je dan nog voor de N-blokjes?

T7
1 Vergeet dat er negen stoelen staan en zet eerst de zes leerlingen op een rij.
2 Op welke plekken in de rij van leerlingen kan de heer Aap nu gaan staan? Hoeveel plekken zijn er nu nog over voor de heer Noot?

T8

1 Het gaat om een halve competitie.
2 Hoeveel schaakpartijen zijn er bij 2 schakers? Hoeveel bij 3? Enzovoorts.

T9

1 Probeer wat mogelijkheden uit en bereken de bijbehorende scores.
2 Wat is de laagst mogelijke score die je kunt halen?
3 Welke scores tussen de laagste en de hoogste kunnen niet voorkomen?

T10

1 Kijk naar de vergelijking en zie wat opvalt (13!).
2 Probeer eens (1,1) en zie dat het niet klopt, pas de *a* zo aan dat het wel klopt.

T11

1 Maak een kortste route van *A* naar *G*.
2 Hoeveel kortste routes zijn er van *A* naar *F*?
3 Bepaal van elk van de punten op de drie vlakken hoeveel kortste routes er van *A* naar dat punt zijn.

T12

1 Kijk wat je kan concluderen uit de eerste en de tweede regel.
2 Doe dat ook voor de tweede en de derde, enzovoorts.

T13

1 Een hoekpunt van de kubus heeft nu drie punten: ga per punt na hoeveel lijnstukken er binnen de kubus liggen.
2 Ga na of je hierdoor dubbel telt.

T14

1 Schrijf een aantal stappen uit.
2 Zorg dat je in ieder drietal blijft schrijven (*a*...,*b*...,*c*...), totdat de ... gelijk worden.

VERRASSING

V1
1 Bepaal hoeveel vragen ze goed beantwoordt per toets.

V2
1 Bekijk de plaatjes twee aan twee.
2 Je kan de lengte uitdrukken in getallen.

V3
1 Probeer schematisch, beginnend bij een getal van één cijfer, de getallen langs te gaan waar het voor geldt.

V4
1 Volg de punten bij de verplaatsingen.

V5
1 Een driehoek met alleen maar wit is ook mogelijk.
2 Voeg een kleur toe en bepaal het aantal mogelijke driehoeken.
3 Ga zo verder, zo overzichtelijk mogelijk.

V6
1 Overstaande hoeken zijn gelijk.
2 Kun je van de middelste driehoek de hoek rechtsonder uitdrukken in x?

V7
1 Welke delers zijn er die niet deelbaar door 3 of 5 zijn?
2 Welke delers zijn er die precies één keer deelbaar door 3 zijn, maar niet deelbaar door 5?

V8
1 Gok de lengte van een ribbe van de kubus en bereken bij die lengte hoeveel cm^3 er afgezaagd zou zijn.
2 Noem de lengte van een ribbe van de kubus x.
3 Wat is de lengte van de ribbe van de kubus die overblijft na het zagen, uitgedrukt in x?

V9

1 Maak eens een paar voorbeelden van getallen van twee cijfers, het omgekeerde en de som ervan.
2 Schrijf een getal als $10a + b$ met a en b de cijfers van het getal.

V10

1 Neem eens een ruit met de juiste verhouding en bepaal de som van de lengtes van de diagonalen en de omtrek.

V11

1 Bedenk hoeveel van die getallen er zijn.
2 Bepaal hoe vaak de cijfers voorkomen op één van de vier plaatsen.

V12

1 Bepaal hoe je de kubus moet zien om zoveel mogelijk kubusjes te zien.
2 Kijk eens hoeveel je ziet als de kubus 2^3 kubusjes bevat, en 3^3.

V13

1 Getallen deelbaar door 44 moeten in elk geval even zijn. Wat geldt nog meer?
2 Welke mogelijkheden zijn er voor de laatste twee cijfers als het getal deelbaar moet zijn door 4?

V14

1 Gebruik de stelling van Pythagoras.
2 Bereken de afstand van het scharnier van een deur tot het scharnier van de deur in de volgende muur.
3 Van welke andere rechthoekige driehoek weet je nu ook twee zijden?