



# Maarttoets

vrijdag 6 maart 2026

**Opgave 1.** Laat  $ABCD$  een rechthoek zijn met  $|AB| < |BC|$ , en met omgeschreven cirkel  $\Gamma$ . Punt  $P$  ligt op de boog  $BC$  die  $A$  niet bevat, en punt  $Q$  ligt op de boog  $CD$  die  $A$  niet bevat, zodat  $|BP| = |CQ|$ . De loodlijn uit  $B$  op  $AQ$  snijdt de lijn  $AP$  in het punt  $X$ . Bewijs dat  $|PQ| = |XQ|$ .

**Opgave 2.** Bepaal alle gehele getallen  $z$  die geschreven kunnen worden in de vorm  $z = \frac{a^2 - b^2}{b}$ , waarbij  $a$  en  $b$  positieve gehele getallen zijn.

**Opgave 3.** Kees doet onderzoek naar het weer. Hij kijkt elke dag of het wel of niet regent. Op dag 1 regent het sowieso wel, en op dag 2 sowieso niet. Vanaf dag 3 schrijft Kees aan het eind van elke dag op welk deel van de dagen het heeft geregend. Als het bijvoorbeeld op dag 3 wel regent, en op dag 4 en 5 niet, dan zijn de eerste 3 getallen die Kees opschrijft  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  en  $\frac{2}{5}$ .

Dag 1 en 2 liggen dus vast, maar afhankelijk van wat er vanaf dag 3 gebeurt zijn er verschillende rijtjes mogelijk. We noemen een getal  $c \in (0, 1)$  *onontbeerlijk* als de volgende eigenschap geldt: als in een rijtje een getal voorkomt dat kleiner is dan  $c$ , en een getal dat groter is dan  $c$ , dan moet het getal  $c$  er ook in staan.

Vind alle onontbeerlijke getallen  $c \in (0, 1)$ .

**Opgave 4.** Zij  $\triangle ABC$  een scherphoekige driehoek met  $|BC| > |AC|$  en zwaartepunt  $Z$ . Zij  $M$  het midden van  $AB$  en zij  $F$  het voetpunt van de hoogtelijn vanuit  $C$ . De zwaartelijn  $CM$  snijdt de omgeschreven cirkel  $\Gamma$  van  $\triangle ABC$  nogmaals in  $P$ . Zij  $Q$  het snijpunt van  $ZF$  en  $\Gamma$  zodanig dat  $F$  tussen  $Z$  en  $Q$  ligt. Bewijs dat  $FMPQ$  een koordenvierhoek is.

**Opgave 5.** Beschouw de rij  $a_0, a_1, a_2, \dots$  gedefinieerd door

$$a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n - 2 \text{ voor alle gehele } n \geq 2, \text{ en } a_0 = a_1 = 1.$$

Bewijs dat alle termen in de rij geheel zijn.

*Beschikbare tijd: 3 uur en 30 minuten.*

*Elke opgave is 7 punten waard.*