IMO-selectietoets III

vrijdag 7 juni 2024

Uitwerkingen

Opgave 1. Op een 2023×2023 bord staan er op sommige vakjes een kever, met hoogstens één kever per vakje. Na een minuut gaat elke kever een vakje naar links of rechts, of een vakje naar boven of beneden. Na elke volgende minuut gaat elke kever weer een vakje verder, maar ze maken altijd een bocht van 90 graden. Als een kever de ene minuut naar links of rechts ging dan gaat die dus de volgende minuut naar boven of beneden, en vice versa. Wat is het minimale aantal kevers dat er op het bord moet staan zodat je zeker weet dat er in de loop der tijd een keer twee kevers tegelijk in hetzelfde vakje terecht komen, ongeacht waar de kevers beginnen en hoe ze bewegen (de regels in acht nemende).

Oplossing. Het antwoord is $2022^2 + 1$.

Eerst laten we zien dat 2022^2 inderdaad onvoldoende is. Hiervoor delen we een 2022×2022 deelbord op in 2×2 bordjes. In elk zo'n bordje kunnen we vier kevers plaatsen zodanig dat ze in een met de klok mee een cirkeltje (vierkantje) lopen.

Stel nu dat we meer dan 2022^2 kevers hebben. We willen bewijzen dat er ooit twee op eenzelfde vakje terecht komen. Hiertoe nummeren we de vakjes van $(1, 1)$ t/m $(2023, 2023)$ en kleuren we het bord als volgt: de vakjes in een oneven rij en oneven kolom kleuren we A, een oneven rij en een even kolom kleuren we B, een even rij en even kolom kleuren we C en een even rij en oneven kolom kleuren we D. De helft van de diagonalen is dus gekleurd met A en C en de andere met B en D. Dus er zijn 1012^2 vakjes A, er zijn 1011^2 vakjes C, en er zijn $1011 \cdot 1012$ vakjes van zowel B als D.

Dan volgt elke kever een cyclisch pad $A \to B \to C \to D \to A$ of $A \to D \to C \to B \to A$. We merken op dat er niet meer dan 1011^2 kevers in vakjes C kunnen beginnen, want daar zijn er maar 1011^2 van. Omdat het aantal kevers groter is dan 2022^2, moeten er dus meer dan 1011^2 kevers op vakjes A zijn of meer dan $2 \cdot 1011^2$ kever op vakjes B en D samen.

In het eerste geval hebben we na twee minuten meer dan 1011^2 kevers in vakjes C en concluderen we dat er twee kevers samenkomen.

In het tweede geval zijn er na de eerste minuut meer dan $2 \cdot 1011^2$ kevers in de vakjes A en

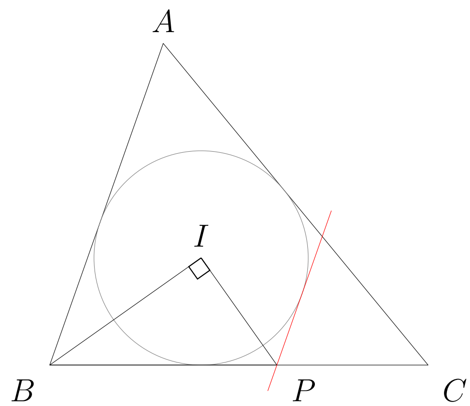
C samen. Dan komen er dus twee kevers samen in C of vinden we meer dan 1011^2 kevers op vakjes A. In dat geval krijgen we na de derde minuut meer dan 1011^2 kevers in vakjes C en concluderen we alsnog dat er twee kevers samenkomen. $\square$

Opgave 2. Laat driehoek $\triangle ABC$ gegeven zijn. Op lijnstuk BC ligt punt P, zodanig dat de cirkel met middellijn BP door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ gaat. Bewijs dat

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{c}{s-c},$$

waarbij c de lengte is van lijnstuk AB, en s de helft van de omtrek van $\triangle ABC$.

We introduceren voor onze oplossingen uiteraard I als het middelpunt van de ingeschreven cirkel, en noemen de ingeschreven cirkel zelf ω. Wegens het gegeven geldt met Thales dat $\angle BIP = 90°$.



Oplossing 1. We introduceren de tweede raaklijn ℓ door P aan ω naast BC. Merk op dat

$$\angle ABP = 2\angle IBP = 2(90° - \angle BPI) = 180° - 2\angle BPI = 180° - \angle(BP, \ell) = \angle(CP, \ell),$$

waarbij we gebruikmaken van het feit dat BI bissectrice is van $\angle ABP$, en dat PI de bissectrice is van de hoek tussen PB en ℓ. Met F-hoeken volgt hieruit dat $AB \parallel \ell$. De afstand tussen deze twee parallelle lijnen is $2r$ met r de straal van de ingeschreven cirkel.

Als we de afstand van C tot AB nu h noemen, zien we dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ enerzijds gelijk is aan rs, en anderzijds $\frac{1}{2}ch$. Uit $rs = \frac{1}{2}ch$ volgt nu dat

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{d(AB, C)}{d(AB, \ell)} = \frac{h}{2r} = \frac{s}{c}.$$

We concluderen dat

$$\frac{|PC|}{|BP|} = \frac{|BC| - |BP|}{|BP|} = \frac{|BC|}{|BP|} - 1 = \frac{s}{c} - 1 = \frac{s-c}{c}.$$

□

Oplossing 2. Zij D het raakpunt van ω met BC. We definiëren I' verder als het middelpunt van de aangeschreven cirkel van $\triangle ABC$ tegenover C. En zij D' de projectie van I' op BC. Dat is dus het raakpunt van de aangeschreven cirkel aan BC. Onderdeel van de Ravi-transformatie is dan dat $|CD'| = s$.

Nu merken we op dat BI' de buitenbissectrice is en dus loodrecht staat op de binnenbissectrice BI. Aangezien PI ook loodrecht op BI staat, betekent dit dat $BI' \parallel PI$. Nu merken we op dat de puntvermenigvuldiging vanuit C die I' naar I stuurt, ook D' naar D stuurt en B naar P. Hieruit volgt dat

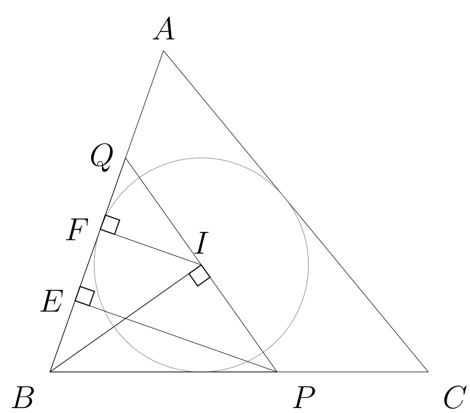
$$|CP| = |CB| \cdot \frac{|CD|}{|CD'|} = a \cdot \frac{s-c}{s},$$

dus

$$|BP| = |BC| - |CP| = a - \frac{a(s-c)}{s} = \frac{ac}{s}.$$

Nu volgt dat $\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{a}{|BP|} = \frac{s}{c}$ en kunnen we het afmaken zoals in Oplossing 1. □

Oplossing 3.



We gaan bewijzen dat $d(P, AB) = 2r$ met r de straal van ω, zodat we het ofwel af kunnen maken zoals in oplossing 1, ofwel het argument in deze oplossing gebruiken om de opgave af te maken.

Projecteer I en P op AB en noem de beelden F en E. Merk voor het snijpunt Q van PI op dat in $\triangle BPQ$ nu BI zowel bissectrice als hoogtelijn is, en dus I het midden is van

PQ. Nu volgt onmiddellijk dat $\triangle QIF \sim \triangle QPE$ een puntvermenigvuldiging vanuit Q met factor 2 is. Dus $PE = 2 \cdot IF = 2r$.

We kunnen het nu afmaken zoals in oplossing 1 door op te merken dat nu

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{d(C, AB)}{d(P, AB)} = \frac{d(C, AB)}{2r} = \frac{s}{c}.$$

Maar we kunnen nu ook opmerken dat in rechthoekige driehoek $\triangle BPE$ geldt dat

$$|BP| = \frac{2r}{\sin\beta} = \frac{rs}{\frac{1}{2}\sin\beta \cdot ac} \cdot \frac{ac}{s} = \frac{ac}{s},$$

en hier volgt óók

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{a}{\frac{ac}{s}} = \frac{s}{c}$$

uit. $\square$

Opgave 3. Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficienten van graad $n > 1$ waarvoor geldt dat $Q(x) = P(P(P(x))) - P(x)$ precies n^3 verschillende reële nulpunten heeft. Bewijs dat de nulpunten van $Q(x)$ in twee groepen verdeeld kunnen worden waarvan het rekenkundig gemiddelde hetzelfde is.

Oplossing 1. We schrijven γ_i met $1 \leq i \leq n^3$ voor de verschillende wortels zijn van $Q(x)$. Dat betekent dat $P(P(P(\gamma_i))) - P(\gamma_i) = 0$, dus $P(\gamma_i)$ is een nulpunt van het polynoom $P(P(x)) - x$. De graad van $P(P(x)) - x$ is n^2, dus dit polynoom heeft maximaal n^2 nulpunten, die we noteren met β_i. Voor elk nulpunt β_i heeft de vergelijking $P(x) = \beta_i$ maximaal n oplossingen. In totaal hebben we dus maximaal $n^2 \cdot n$ oplossingen γ_i zo dat $P(\gamma_i)$ is een nulpunt van $P(P(x)) - x$. Aangezien dit maximum bereikt wordt, zijn er n^2 nulpunten β_i van $P(P(x)) - x$ en hebben we voor elke β_i precies n oplossingen van $P(x) = \beta_i$.

We schrijven $P(x) = ax^n - bx^{n-1} + P'(x)$ met $\deg P'(x) \leq n - 2$. Anderzijds krijgen we voor elke β_i een deelverzameling $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ van de wortels $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n^3}\}$ zo dat we $P(x) - \beta_i$ kunnen schrijven als $P(x) - \beta_i = a(x - \delta_1)(x - \delta_2)\cdots(x - \delta_n)$. Dus $ax^n - bx^{n-1} + P'(x) - \beta_i = a(x - \delta_1)(x - \delta_2)\cdots(x - \delta_n)$. Omdat $n \geq 2$ volgt hieruit dat de som $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ van de nulpunten van $P(x) - \beta_i$ gelijk is aan b/a. (Dit is eigenlijk Viéta.) We concluderen dat we n^2 groepen hebben van n nulpnten van $Q(x)$ met telkens hetzelfde gemiddelde $\frac{b}{na}$. $\square$

Oplossing 2. We beginnen met een klein lemma: als $K(x)$ en $L(x)$ twee polynomen zijn met gehele coëfficienten zo dat voor alle gehele x geldt dat $K(x) \mid L(x)$ als getallen, dan geldt dat $K(x) \mid L(x)$ als polynomen. Voor het bewijs schrijven we $L(x) = K(x)M(x) + r(x)$ voor polynomen $M(x)$ en $r(x)$ zo dat de graad van $r(x)$ kleiner is dan de graad van $K(x)$. Deze voorwaarde impliceert dat er een N bestaat zo dat $|K(x)| > |r(x)|$ voor alle $x > N$. Aangezien ook geldt dat $K(x) \mid L(x) - K(x)M(x) = r(x)$, geldt dat $r(x) = 0$ voor alle $x > N$. Aangezien $r(x)$ oneindig veel nulpunten heeft, kunnen we concluderen dat $r(x) = 0$ voor alle x, waarmee we het lemma hebben bewezen.

In het bijzonder volgt uit $a - b \mid P(a) - P(b)$ met $a = P(x)$ en $b = x$ dat $P(x) - x \mid P(P(x)) - P(x)$ voor alle x. Dus uit het lemma volgt dat $P(x) - x \mid P(P(x)) - P(x)$ als polynomen. En als we hier $P(x)$ invullen, vinden we dat ook $P(P(x)) - P(x) \mid P(P(P(x))) - P(P(x))$

Schrijf α_i met $1 \leq i \leq n$ voor de wortels van van $P(x) - x$, a priori mogelijk complex en met multipliciteit. Dan geldt $Q(\alpha_i) = 0$, dus α_i is reëel. Als α_i multipliciteit groter dan een zou hebben, dan geldt dus dat $(x - \alpha_i)^2 \mid P(x) - x$. Hieruit volgt wegens het lemma dat $(x - \alpha_i)^2 \mid P(P(x)) - P(x)$ en $(x - \alpha_i)^2 \mid P(P(P(x))) - P(P(x))$. Het optellen van de laatste twee relaties geeft dat $(x - \alpha_i)^2 \mid Q(x)$ wat in tegenspraak is met de voorwaarden van de opgave.

Schrijf nu β_i met $1 \leq i \leq n^2$ voor de wortels van $P(P(x)) - P(x)$, alle ook reëel en verschillend, zo dat $\alpha_i = \beta_i$ voor $i \leq n$. (Let op: dit zijn niet dezelfde β_i als in de eerste oplossing. We kunnen dit bewijs hier ook doen met $P(P(x))-x$ zoals in de eerste oplossing. Dan zouden de β_i wel overeenkomen.) En laat γ_i met $1 \leq i \leq n^3$ de wortels zijn van $Q(x)$ met $\beta_i = \gamma_i$ voor $i \leq n^2$.

We schrijven $P(x) = ax^n - bx^{n-1} + P'(x)$ met $\deg P'(x) \leq n-2$ zo dat $b = a(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$. Dan rekenen we gemakkelijk uit dat $P(P(x)) - P(x) = a^{n+1}x^{n^2} - na^n bx^{n^2-1} + P''(x)$ met $\deg P''(x) \leq n^2 - 2$, dus $na^n b = a^{n+1}(\beta_1 + \cdots + \beta_{n^2})$. En evenzo $Q(x) = a^{n^2+n+1}x^{n^3} - n^2 a^{n^2+n} bx^{n^3-1} + P'''(x)$ $\deg P''(x) \leq n^2 - 2$, dus $n^2 a^{n^2+n} b = a^{n^2+n+1}(\gamma_1 + \cdots + \gamma_{n^3})$. Hieruit volgt dat

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} = \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_{n^2}}{n^2} = \frac{\gamma_1 + \cdots + \gamma_{n^3}}{n^3} = \frac{b}{na}.$$

De verzameling van α_i en zijn complement of de verzameling van β_i en zijn complement geven de gevraagde splitsing. $\square$

Opgave 4. Initieel staat er een positief geheel getal N op het schoolbord. We vervangen het getal herhaaldelijk aan de hand van de volgende regels:

- vervang het getal op het bord door een positief veelvoud van zichzelf,
- vervang het getal door een getal met dezelfde cijfers in een andere volgorde. (Het is toegestaan dat het nieuwe getal met een of meerdere nullen begint, die dan worden weggelaten.)

Bepaal voor welke waarden van N het mogelijk is om 1 te krijgen na een serie van zetten.

Een voorbeeld van geldige zetten is $5 \to 20 \to 140 \to 041 = 41$.

Oplossing. Antwoord: dit is mogelijk precies als $N \not\equiv 0 \mod 3$. Inderdaad als 3 wel een deler is N, dan is dat na beide stappen nog zo: elk veelvoud van N is deelbaar door 3, en het verwisselen van de cijfers verandert de som van de cijfers niet.

Nu nemen we aan dat $N \not\equiv 0 \mod 3$. We gaan nu eerst laten zien dat we N met de stappen kunnen vervangen door een getal dat enkel enen heeft als cijfers. Daarna laten we zien dat zo'n getal te vervangen is door 1.

Door N met 10 te vermenigvuldigen kunnen we nullen toevoegen, en door de cijfers te wisselen kunnen we nullen weghalen. Om N te vervangen door een getal dat enkel enen heeft als cijfers, vermenigvuldigen we N eerst een aantal keer met 2 tot het eerste cijfer gelijk is aan 1. Door nu de 1 juist op de laatste plek te zetten krijgen we een getal relatief priem met 10. Wegens Euler-Fermat geldt dan voor $n = \varphi(N)$ dat $10^{kn} \equiv 1^k \equiv 1 \mod N$ voor alle k. Hieruit volgt dat $10^n + 10^{2n} + \ldots + 10^{Nn} \equiv 0 \mod N$. Dat is dus een veelvoud van N en door de nullen weg te halen krijgen we een getal met precies $N \not\equiv 0 \mod 3$ enen.

Voor stap 2 schrijven we A_n voor het getal met n cijfers welke allemaal gelijk zijn aan 1. Nu merken we op dat $10^n = 9 \cdot A_n + 1$, dus $10^n \equiv 1 \mod A_n$. Dat betekent dat

$$10^{10n} + 10^{9n} + \ldots + 10^n + A_n - 10 \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 + A_n - 10 = A_n \mod A_n.$$

Zodoende is het getal links een veelvoud van A_n zodat we het kunnen verkrijgen uit A_n met stap 1. Het heeft 10 extra enen (op plekken $10n$, $9n$, etc. tellend vanaf rechts, beginnend bij het nulde cijfer) en één 1 minder (op de plek van de tientallen). Met stap 2 herschrijven we dit naar A_{n+9}. Door deze stap te herhalen kunnen we alle A_m verkrijgen met m in de rekenkundige rij $n + 9k$, met $3 \nmid n$ en $k \geq 0$.

Nu bekijken we de verzameling van tweemachten modulo 9. Dat is de repeterende rij $1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, \ldots$. In het bijzonder komt elke restklasse ongelijk 0, 3, 6 oneindig vaak voor in deze rij. Dat betekent dat er een tweemacht is groter dan n met dezelfde restklasse als n modulo 9. Deze tweemacht zit dus in de rekenkundige rij: er zijn k en ℓ zodanig dat $n + 9k = 2^\ell$.

Als laatste beweren we dat we stappen kunnen maken van A_{2n} naar A_n. Hiervoor gaan we op zoek naar een tweemacht waarvan we de cijfers kunnen groeperen in twee even grote groepen (plus-min 1 voor oneven aantal cijfers) met dezelfde som. Dat vinden we bij $2^{13} = 8192$. Hiermee komen we bij de volgende stappen van A_2 naar A_1:

$$11 \to 11 \cdot 118 = 1298 \to 8192 = 2^{13} \to 10^{13} \to 1.$$

Als we groepjes van twee maken van de enen van A_{2n} met genoeg nullen ertussen en deze stappen tegelijk toepassen op elk groepje, dan geeft dit ook een proces van A_{2n} naar A_n. Als we dit herhaaldelijk toepassen op A_{2^ℓ} eindigen we uiteindelijk bij A_1. $\square$

Opmerking. In plaats van A_N kunnen we met iets meer werk ook het kleinere getal A_S maken met S de som van de cijfers van N. Inderdaad, neem aan dat het m^{de} cijfer van N groter is dan 1 (tellend vanaf rechts, beginnend bij het nulde cijfer). Nu kiezen we k zodanig dat $kn + m$ groter is dan het aantal cijfers van N met $n = \varphi(N)$. Dan is $10^{kn+m} - 10^m + N$ een veelvoud van N waarbij het m^{de} cijfer één kleiner is, en we één extra cijfer 1 hebben met een aantal nullen. Door de nullen weg te halen en deze stap te herhalen krijgen we een getal dat enkel uit enen bestaat. Aangezien we begonnen met $N \not\equiv 0 \mod 3$ is het aantal enen niet deelbaar door 3.