IMO-selectietoets III

vrijdag 7 juni 2024

Opgave 1. Op een 2023×2023 bord staan er op sommige vakjes een kever, met hoogstens één kever per vakje. Na een minuut gaat elke kever een vakje naar links of rechts, of een vakje naar boven of beneden. Na elke volgende minuut gaat elke kever weer een vakje verder, maar ze maken altijd een bocht van 90 graden. Als een kever de ene minuut naar links of rechts ging dan gaat die dus de volgende minuut naar boven of beneden, en vice versa. Wat is het minimale aantal kevers dat er op het bord moet staan zodat je zeker weet dat er in de loop der tijd een keer twee kevers tegelijk in hetzelfde vakje terecht komen, ongeacht waar de kevers beginnen en hoe ze bewegen (de regels in acht nemende).

Opgave 2. Laat driehoek $\triangle ABC$ gegeven zijn. Op lijnstuk BC ligt punt P, zodanig dat de cirkel met middellijn BP door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ gaat. Bewijs dat

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{c}{s-c},$$

waarbij c de lengte is van lijnstuk AB, en s de helft van de omtrek van $\triangle ABC$.

Opgave 3. Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficienten van graad $n > 1$ waarvoor geldt dat $Q(x) = P(P(P(x))) - P(x)$ precies n^3 verschillende reële nulpunten heeft. Bewijs dat de nulpunten van $Q(x)$ in twee groepen verdeeld kunnen worden waarvan het rekenkundig gemiddelde hetzelfde is.

Opgave 4. Initieel staat er een positief geheel getal N op het schoolbord. We vervangen het getal herhaaldelijk aan de hand van de volgende regels:

- vervang het getal op het bord door een positief veelvoud van zichzelf,
- vervang het getal door een getal met dezelfde cijfers in een andere volgorde. (Het is toegestaan dat het nieuwe getal met een of meerdere nullen begint, die dan worden weggelaten.)

Bepaal voor welke waarden van N het mogelijk is om 1 te krijgen na een serie van zetten.

Een voorbeeld van geldige zetten is $5 \to 20 \to 140 \to 041 = 41$.