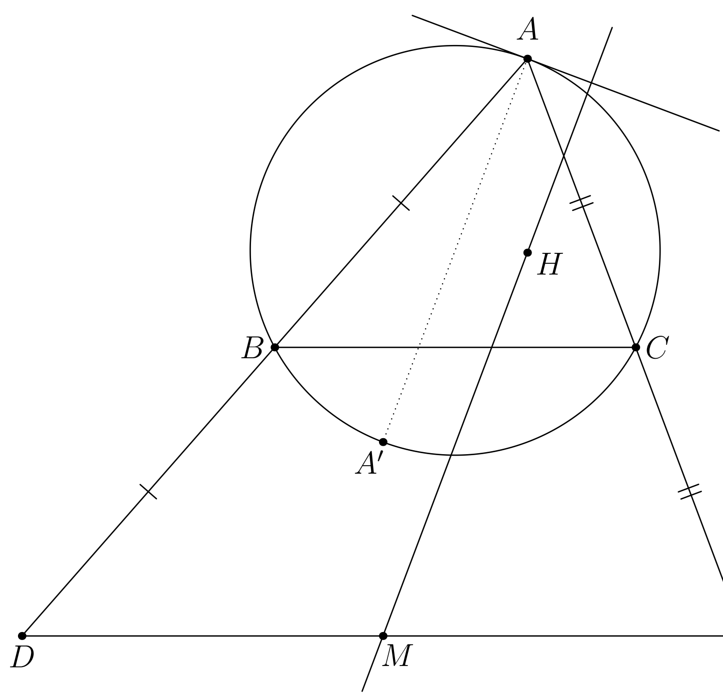
IMO-selectietoets II

donderdag 6 juni 2024

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij gegeven driehoek $\triangle ABC$ met hoogtepunt H, en omgeschreven cirkel Γ. Zij verder D de spiegeling van A in B, en zij E de spiegeling van A in C. Het midden van lijnstuk DE noemen we M.

Bewijs dat de raaklijn aan Γ in A loodrecht staat op HM.



Oplossing 1. Zij A' de spiegeling van H in het midden van BC. Omdat A de spiegeling is van M in het midden van BC, merken we op dat $A'A$ parallel is aan HM (want deze lijnstukken zijn puntspiegelingen van elkaar). Verder is A' een van de zogenaamde dieptepunten: A' ligt op Γ en is de antipodaal van A. Inderdaad, het eerste volgt uit de koordenvierhoekstelling waarvoor we uitrekenen dat

$$\angle BA'C = \angle CHB = 180^\circ - \angle BCH - \angle HBC = \angle ABC + \angle BCA = \angle 180^\circ - \angle CAB.$$

Evenzo ligt de spiegeling A'' van H in de lijn BC op Γ. Omdat AH en HA'' allebei loodrecht op BC staan, zijn A, H en A'' collineair en omdat $A'A''$ parallel is aan BC vinden we dat $A'A'' \perp AA''$. Met Thales betekent dit dat $A'A$ een diameter is van Γ en dus loodrecht staat op de raaklijn in A. Dus HM staat ook loodrecht hierop. $\square$

Oplossing 2. Zij A' de spiegeling van H in het midden van BC, net als in Oplossing 1. Zij O verder het middelpunt van Γ en N het midden van BC. Wegens de spiegeling is A' ook het hoogtepunt in $\triangle BCM$. Aangezien $\triangle BCM$ de middendriehoek is van $\triangle ADE$ is A' daarmee ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ADE$. Nu doen we een puntvermenigvuldiging vanuit A met factor $\frac{1}{2}$ en een puntvermenigvuldiging vanuit A' met factor 2. Dit geeft

$$|MA'| = 2|NO| = |HA|.$$

Nu zijn de stukjes MA' en HA dus even lang, en ze waren al evenwijdig (want allebei loodrecht op BC). Dus $AHMA'$ is een parallellogram (mogelijk gedegenereerd). We concluderen dat HM parallel is met AA' en dus loodrecht op de raaklijn in A staat. (Als $AHMA'$ gedegenereerd is, dan valt HM samen met AA', dus staat die meteen al loodrecht op de raaklijn in A.) $\square$

Oplossing 3. Er geldt dat BC parallel is met DE (want BC is de middenparallel van $\triangle ADE$), dus de loodlijn vanuit A op BC staat ook loodrecht op DE. Zij F het voetpunt van A op DE, en H' het hoogtepunt van driehoek ADE, dan weten we dus dat A, H, H' en F collinear zijn. Laat V het snijpunt zijn van HM met de raaklijn aan Γ in A. We bekijken eerst het gaval dat $V \neq A$. Neem dan z.v.v.a. aan dat V aan de kant van C ligt. We willen laten zien dat $\angle AVM = 90°$, en omdat $\angle AFM = 90°$, voldoet het om de koordenvierhoek $AMFV$ te bewijzen.

Dit gaan we doen door $\angle VAF$ en $\angle VMF$ aan elkaar gelijk te praten. Alleen voordat we kunnen beginnen moeten we nog twee nieuwe punten introduceren: laat G het voetpunt van de hoogtelijn uit D zijn, en I het voetpunt van de hoogtelijn uit E. Er geldt nu dat $\angle VAF = \angle VAC + \angle CAF = \angle ABC + 90° - \angle AEF = \angle ADE + \angle GDE = 2\angle GDE + \angle ADG$. Aan de andere kant geldt dat $\angle VMF = \angle VMG + \angle GMF$. Omdat $\angle EGD = 90°$, is M het middelpunt van de cirkel door D, E en G. De middelpunt-omtrekshoekstelling zegt vervolgens dat $2\angle GDE = \angle GMF$, waarmee we enkel nog hoeven te bewijzen dat $\angle ADG = \angle VMG$.

Omdat $|AD| = 2|AB|$ en $|AE| = 2|AC|$, geldt dat de driehoek ADE verkregen kan worden door driehoek ABC vanuit A met een factor 2 te schalen. Hierdoor geldt ook dat $|AH'| = 2|AH|$, dus H is het midden van AH'. Dit betekent dat de negenpuntcirkel van ADE door H gaat, en verder weten we ook dat B, M, F, G, C en I op deze cirkel liggen. Samen met de koordenvierhoeken $H'FEG$ ($\angle EGH' = 90° = \angle EFH'$) en $DEGI$ ($\angle EGD =$

$90^\circ = \angle EID$) kunnen we de opgave afmaken: $\angle VMG = \angle HMG = \angle HFG = \angle H'FG = \angle H'EG = \angle IEG = \angle IDG = \angle ADG$. Hiermee hebben we $\angle ADG = \angle VMG$ bewezen, waaruit volgt dat $\angle VAF = 2\angle GDE + \angle ADG = \angle GMF + \angle VMG = \angle VMF$, dus $AMFV$ is een koordenvierhoek, waaruit volgt dat HM loodrecht staat op AV, precies zoals we wilden bewijzen.

Nu hebben we nog het geval dat $V = A$. Noem de raaklijn aan Γ in A even ℓ. Dan vinden we op dezelfde manier dat $\angle(\ell, AF) = \angle(\ell, AC) + \angle CAF = \ldots = \angle VMF = \angle AMF$. Nu hebben we geen koordenvierhoek, maar we zien wel dat ℓ een raaklijn is aan de omgeschreven cirkel van $\triangle AMF$. Van die omgeschreven cirkel is AM natuurlijk een diameter (wegens Thales), dus ℓ staat loodrecht op $AM = HM$. $\square$

Oplossing 4. Merk op dat $ABMC$ een paralellogram is. Dus als we spiegelen in het snijpunt van de diagonalen gaat $ABMC$ in zichzelf over. Laat X en Y het spiegelpunt van resp. D en E zijn (nog steeds in het snijpunt van de diagonalen van $ABMC$), dan hebben we een driehoek $\triangle XYM$, met middendriehoek $\triangle ABC$. Omdat het middelpunt van de omgeschreven cirkel het hoogtepunt van de middendriehoek is, is H het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle XYM$.

Laat V het snijpunt zijn van HM met de raaklijn aan Γ in A. We bekijken eerst het geval dat $V \neq A$. Neem dan z.v.v.a. aan dat V aan de kant van C ligt. Er geldt dan dat $\angle VAC = \angle ABC = \angle AXC = \angle YXM$. Laat Z het snijpunt zijn van AC met MH. Dan geldt er $\angle VZA = \angle HMY$. Wegens de middelpuntomtrekshoekstelling geldt $2\angle YXM + 2\angle HMY = \angle YHM + \angle HMY + \angle HYM = 180^\circ$, dus $\angle YXM + \angle HMY = 90^\circ$. Maar we hebben $\angle AVZ = 180^\circ - \angle VAC - \angle VZA = 180^\circ - (\angle YXM + \angle HMY) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, waaruit volgt dat HM en AV loodrecht op elkaar staan.

In het geval dat $V = A$ noemen we de raaklijn aan Γ in A weer even ℓ. Dan geldt $\angle(\ell, AC) = \angle YXM$ en $\angle MZE = \angle HMY$. Dus de hoek $\angle(\ell, HM) = \angle(\ell, AC) + \angle MAC = \angle(\ell, AC) + \angle MZE = \angle YXM + \angle HMY = 90^\circ$. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ zo dat voor alle positieve gehele getallen m, n en a geldt dat

a) $f(f(m)f(n)) = mn$,

b) $f(2024a + 1) = 2024a + 1$.

Oplossing 1. Als we $a = 0$ zouden mogen invullen, vinden we $f(1) = 1$. Met $n = 1$ krijgen we dan $f(f(m)) = m$, dus f is bijectief. Helaas mogen we $a = 0$ niet invullen, maar het zet ons wel op het goede spoor.

We beginnen met invullen van $n = 1$. Dit geeft dat $f(f(m)f(1)) = m$, wat betekent dat f bijectief is. Inderdaad, als $f(m) = f(n)$ dan volgt direct $m = f(f(m)f(1)) = f(f(n)f(1)) = n$ en voor elke m is er een a zo dat $f(a) = m$ namelijk $a = f(m)f(1)$. Nu vullen we $m = n$ in, waardoor we krijgen dat $f(f(m)^2) = m^2 = f(f(m^2)f(1))$. Wegens de injectiviteit van f volgt hieruit dat $f(m)^2 = f(m^2)f(1)$. Kies nu m_1 waarvoor geldt dat $f(m_1) = 1$. (Uit ons bewijs voor surjectiviteit volgt dat we hiervoor $m_1 = f(1)^2$ kunnen kiezen, maar dat is niet belangrijk.) Als we $m = m_1$ in het voorgaande invullen krijgen we dat $1 = f(m_1^2)f(1)$. In het bijzonder is $f(1)$ een deler van 1, en omdat het een natuurlijk getal moet zijn concluderen we dat $f(1) = 1$.

Als we nu opnieuw $n = 1$ invullen vinden we dus alsnog dat $f(f(m)) = m$. Nu kunnen we $f(m)$ en $f(n)$ invullen voor m en n zodat we uitkomen op de klassiekere vergelijking

$$f(mn) = f(f(f(m))f(f(n))) = f(m)f(n).$$

Dit betekent dat f bepaald wordt door de waardes $f(p)$ met p priem.

Stel dat we een willekeurig priemgetal p hebben, en laat m en n natuurlijke getallen zijn zo dat $f(p) = mn$. Dan volgt dat $f(m)f(n) = f(mn) = f(f(p)) = p$. Aangezien $f(m)$ en $f(n)$ natuurlijke getallen zijn, moet er gelden dat $f(m) = 1$ of $f(n) = 1$. Wegens injectiviteit is de enige m waarvoor $f(m) = 1$ het getal $m = 1$. Dus $m = 1$ of $n = 1$. We concluderen dat $f(p)$ een priemgetal is.

Stel nu dat er geldt dat $p \nmid 2024$. In het bijzonder betekent dit dat $\text{ggd}(p, 2024) = 1$, dus p heeft een multiplicatieve inverse modulo 2024. Zij b een natuurlijk getal in de restklasse van de inverse, oftewel $bp \equiv 1 \mod 2024$. Omdat $bp \geq p > 1$ volgt uit de tweede vergelijking dat $f(bp) = bp$, maar ook dat $f(bp + 2024p) = bp + 2024p$. Uit de vorige alinea volgt echter dat $f(bp) = f(b)f(p)$ en $f((b + 2024)p) = f(b + 2024)f(p)$. Dat betekent dat $f(p)$ een deler is van zowel bp als $bp + 2024p$. Nu rekenen we uit dat

$$\text{ggd}(bp, bp + 2024p) = \text{ggd}(bp, 2024p) = \text{ggd}(b, 2024)p = p,$$

aangezien b de multiplicatieve inverse is van p modulo 2024. Wegens injectiviteit weten we dat $f(p) \neq 1$, dus dat $f(p) \mid p$ impliceert dat $f(p) = p$.

Stel voor een $p \mid 2024$ dat $f(p) = q$, met $q \neq p$ een ander priemgetal. Dan volgt dat $f(q) = f(f(p)) = p$. Dus alle priemgetallen die niet naar zichzelf worden gestuurd door f vormen paren (p, q) met $f(p) = q$ en $f(q) = p$. Aangezien $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ hebben we vier oplossingen:

- $f(p) = p$ voor alle priemgetallen p. Dus f is de identiteit,
- $f(2) = 11$, $f(11) = 2$ en $f(p) = p$ voor alle $p \notin \{2, 11\}$,
- $f(2) = 23$, $f(23) = 2$ en $f(p) = p$ voor alle $p \notin \{2, 23\}$,
- $f(11) = 23$, $f(23) = 11$ en $f(p) = p$ voor alle $p \notin \{11, 23\}$.

Het is eenvoudig te controleren dat deze functies ook daadwerkelijk voldoen. $\square$

Oplossing 2. We bewijzen eerst dat f injectief is. Stel dat $f(k) = f(\ell)$. Dan volgt uit a) dat

$$k = f(f(k)f(1)) = f(f(\ell)f(1)) = \ell.$$

Dus f is injectief. Nu geldt wegens b) met $a = 1$ dat

$$f(2025f(1)) = f(f(2025)f(1)) = 2025 = f(2025).$$

Dus wegens injectiviteit geldt $2025f(1) = 2025$, oftewel $f(1) = 1$.

Nu geldt

$$f(f(m)f(n)) = mn = 1 \cdot mn = f(f(1)f(mn)) = f(f(mn)),$$

wat met injectiviteit leidt tot $f(m)f(n) = f(mn)$. Door ook $m = 1$ in a) in te vullen, vinden we $f(f(n)) = n$. Dus f is zelfs bijectief.

Net als in de eerste oplossing zien we nu dat f gedefinieerd is door zijn waarden op de priemgetallen, en dat f priemgetallen naar priemgetallen stuurt.

Stel nu dat er geldt dat $p \nmid 2024$. Omdat $\text{ggd}(p, 2024) = 1$, geldt $p^{\varphi(2024)} \equiv 1 \mod 2024$. Dus $p^{\varphi(2024)} = 2024a + 1$ voor een zekere $a > 0$. Wegens b) volgt hieruit dat $f(p^{\varphi(2024)}) = p^{\varphi(2024)}$. Wegens de multiplicativeit $f(mn) = f(m)f(n)$ betekent dit dat $f(p)^{\varphi(2024)} = p^{\varphi(2024)}$. Omdat dit machten zijn van positieve gehele getallen volgt dan dat $f(p) = p$.

Net als in oplossing 1 kan f dus alleen 2, 11 en 23 permuteren en de rest van de oplossing gaat hetzelfde. $\square$

Opgave 3. Gegeven zijn reële getallen a, b en c waarvoor geldt dat $0 \leq a \leq b \leq c$ en $a+b+c=1$. Bewijs dat

$$ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ac\sqrt{c-a} < \frac{1}{4}.$$

Oplossing. Voor elke $x \leq y$ hebben we wegens de rekenkundig-meetkundig gemiddelde ongelijkheid dat $\sqrt{y-x} \leq \frac{y-x+1}{2}$ met gelijkheid dan en slechts dan als $y-x=1$. Verder merken we op dat $1-a=b+c$ en de symmetrische varianten, omdat $a+b+c=1$. Als we dit toepassen op de wortels aan de linkerkant krijgen we

$$\begin{aligned} ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ac\sqrt{c-a} &\leq ab\frac{b-a+1}{2} + bc\frac{c-b+1}{2} + ac\frac{c-a+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(ab(2b+c) + bc(a+2c) + ca(2c+b)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(4ab^2 + 4bc^2 + 4ac^2 + 6abc\right) \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap voor het gemak alvast $\frac{1}{4}$ hebben uitgedeeld. Nu merken we op dat $ab^2 \leq b^3$ en $ac^2 + bc^2 \leq 2bc^2 = 2bc \cdot c \leq (b^2+c^2)c = b^2c + c^3$. In deze ongelijkheden geldt gelijkheid respectievelijk als $a=b$ en als $a=b=c$. Als we dit toepassen hierboven krijgen we

$$\begin{aligned} 4ab^2 + 4bc^2 + 4ac^2 + 6abc &\leq 3ab^2 + b^3 + 3bc^2 + 3ac^2 + b^2c + c^3 + 6abc \\ &\leq a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc \\ &= (a+b+c)^3 = 1. \end{aligned}$$

In de laatste ongelijkheid geldt alleen gelijkheid als de termen a^3, a^2b, b^2c en a^2c die we hebben toegevoegd allemaal nul zijn. In het bijzonder moet dan gelden dat $a=0$ en $b^2c=0$, waaruit wegens $b \leq c$ volgt dat $b=0$.

Het is eenvoudig te zien dat niet alle gelijkheidsgevallen tegelijk kunnen optreden. Zo is voor $a=b=0$ de linkerkant van de oorspronkelijke ongelijkheid gelijk aan nul. $\square$

Opgave 4. Gegeven is een natuurlijk getal n. Er zijn n eilanden met $n-1$ bruggen ertussen zo dat je van elk eiland bij elk ander eiland kan komen. Op een middag breekt er brand uit op een van de eilanden. Elke morgen verspreidt het vuur zich naar alle naburige eilanden (die eilanden die met een brug zijn verbonden). Om het vuur te controleren wordt elke nacht een brug opgeblazen, zolang het vuur nog ruimte heeft om zich te verspreiden. Zij X het minimale aantal bruggen dat men moet opblazen voor een gegeven eilandengroep en brandhaard. Vind het maximum van X over alle mogelijke eilandengroepen en brandhaarden.

Oplossing. Het antwoord is $\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$.

Voor $n = k^2+1$ beschouwen we de eilandengroep met k^2 eilanden in een $k \times k$-grid, waarin de eilanden per rij verbonden worden en alle eilanden in de meest linker kolom nog met het laatste eiland worden verbonden, waar ook de brand start. Dan zijn er na $\ell < k$ nachten nog minstens $k-\ell > 0$ rijen over waarin nog geen brug is opgeblazen. In zo'n rij verslindt het vuur die morgen het ℓ^{de} eiland. Dat betekent dat er na die morgen nog een onverwoeste brug is (richting het k^{de} eiland) om op te blazen. Je moet in deze eilandengroep dus minstens k bruggen opblazen. Door random eilanden aan deze groep toe te voegen vinden we dat $X \geq \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$.

Nu beschrijven we een strategie waaruit blijkt dat voor elke eilandengroep het minimum ook hoogstens $\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$ is. In deze strategie blazen we elke nacht de brug op zo dat je de meeste eilanden afsnijdt van het vuur. We beschouwen daarna de situatie door alle eilanden die in brand staan, samen te trekken tot één punt en alle afgesneden eilanden te vergeten. Nu hebben we dus weer een situatie met één brandhaard, maar minder eilanden. Nu maken we het af met inductie naar $k = \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$.

De inductiebasis $k=0$, geeft als enige mogelijkheid $n=1$ waarvoor er maar één configuratie is en er inderdaad geen bruggen hoeven worden opgeblazen (want die zijn er niet). Stel nu als inductiehypothese dat in alle groepen met hoogstens k^2 eilanden hoogstens $k-1$ bruggen hoeven te worden opgeblazen en bekijk een eilandgroep met $n \leq (k+1)^2$ eilanden.

Stel dat de brandhaard een graad had gelijk aan d: het eiland grenst aan d eilanden middels een brug. Dan geldt wegens het ladenprincipe dat er een tak is van de brandhaard met minstens $\frac{n-1}{d}$ eilanden. In de ochtend zijn er met deze strategie dus minstens $\frac{n-1}{d}$ eilanden verwijderd door een brug op te blazen, en daarna heeft het vuur $d-1$ eilanden overgenomen. Met het samentrekken van deze eilanden krijgen we dus een graaf waarvan het aantal eilanden kleiner of gelijk is aan

$$n - \tfrac{n-1}{d} - (d-1) = n+1-\tfrac{n-1}{d} - d \leq n+1-2\sqrt{n-1} = (\sqrt{n-1}-1)^2+1 < k^2+1,$$

waarbij de eerste ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid van rekenkundig-meetkundig gemiddelde: $\frac{n-1}{d} + d \geq 2\sqrt{n-1}$. Aangezien het aantal eilanden geheel is, volgt hieruit dat het er hoogstens k^2 zijn. Dus de eilandgroep met n eilanden heeft er genoeg aan om $1+(k-1) = k$ bruggen op te blazen. Dit bewijst de inductiestap en is daarmee het einde van het bewijs. $\square$