IMO-selectietoets II

donderdag 6 juni 2024

Opgave 1. Zij gegeven driehoek $\triangle ABC$ met hoogtepunt H, en omgeschreven cirkel Γ. Zij verder D de spiegeling van A in B, en zij E de spiegeling van A in C. Het midden van lijnstuk DE noemen we M.

Bewijs dat de raaklijn aan Γ in A loodrecht staat op HM.

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ zo dat voor alle positieve gehele getallen m, n en a geldt dat

a) $f(f(m)f(n)) = mn$,

b) $f(2024a + 1) = 2024a + 1$.

Opgave 3. Gegeven zijn reële getallen a, b en c waarvoor geldt dat $0 \leq a \leq b \leq c$ en $a + b + c = 1$. Bewijs dat

$$ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ac\sqrt{c-a} < \frac{1}{4}.$$

Opgave 4. Gegeven is een natuurlijk getal n. Er zijn n eilanden met $n - 1$ bruggen ertussen zo dat je van elk eiland bij elk ander eiland kan komen. Op een middag breekt er brand uit op een van de eilanden. Elke morgen verspreidt het vuur zich naar alle naburige eilanden (die eilanden die met een brug zijn verbonden). Om het vuur te controleren wordt elke nacht een brug opgeblazen, zolang het vuur nog ruimte heeft om zich te verspreiden. Zij X het minimale aantal bruggen dat men moet opblazen voor een gegeven eilandengroep en brandhaard. Vind het maximum van X over alle mogelijke eilandengroepen en brandhaarden.