# IMO-selectietoets I

woensdag 5 juni 2024

## Uitwerkingen

**Opgave 1.** Voor een positief geheel getal $n$ definieren we $\alpha(n)$ als het gemiddelde van alle positieve delers van $n$, en $\beta(n)$ als het gemiddelde van alle positieve gehele getallen $k \leq n$ zodat $\text{ggd}(k,n) = 1$.

Vind alle positieve gehele getallen $n$ waarvoor geldt dat $\alpha(n) = \beta(n)$.

---

**Oplossing.** Antwoord: $n = 1$ en $n = 6$.

We merken eerst op dat $n = 1$ voldoet.

We bewijzen nu dat $\beta(n) = \frac{n}{2}$ voor $n \geq 2$. Er geldt namelijk $\text{ggd}(k,n) = \text{ggd}(k-n,n) = \text{ggd}(n-k,n)$, dus $\text{ggd}(k,n) = 1$ dan en slechts dan als $\text{ggd}(n-k,n) = 1$. Dit levert een opdeling van de positieve gehele getallen $1 \leq k \leq n-1$ met $\text{ggd}(k,n) = 1$ in paren $(k, n-k)$, die gemiddelde $\frac{n}{2}$ hebben. Voor $n \geq 2$ geldt $\text{ggd}(n,n) > 1$, dus we zien dat het gemiddelde van alle getallen $1 \leq k \leq n$ met $\text{ggd}(k,n) = 1$ ook gelijk is aan $\frac{n}{2}$. We hebben nu alleen $\frac{n}{2}$ mogelijk dubbel geteld, maar dat maakt niet uit aangezien het gemiddelde precies $\frac{n}{2}$ is.

Priemgetallen voldoen niet, want dan geldt er $\alpha(n) = \frac{n+1}{2}$ en $\beta(n) = \frac{n}{2}$.

Stel nu dat $d$ een positieve deler is van $n$ met $d$ ongelijk aan 1 en $n$. Dan geldt er $2 \leq d \leq \frac{n}{2}$, dus $\left(\frac{n}{2} - d\right)(d-2) \geq 0$, dus $\frac{n}{2}d + 2d \geq n + d^2$, dus $\frac{n}{2} + 2 \geq \frac{n}{d} + d$.

Stel nu dat $n > 6$ samengesteld is. We kunnen de positieve delers van $n$ opdelen in paren $\left(d, \frac{n}{d}\right)$. Het paar $(1,n)$ heeft gemiddelde $\frac{n+1}{2}$, alle andere paren hebben gemiddelde $\frac{\frac{n}{d}+d}{2} \leq \frac{\frac{n}{2}+2}{2} < \frac{n-1}{2}$, of het is alleen het getal $\sqrt{n} \leq \frac{n}{3} < \frac{n-2}{2}$ (in dit geval geldt $n \geq 9$). Als $n$ niet het kwadraat is van een priemgetal, hebben we een paar met gemiddelde $\frac{n+1}{2}$, een paar met gemiddelde kleiner dan $\frac{n-1}{2}$, en nog mogelijk meer paren (of een los getal) met allemaal een gemiddelde kleiner dan $\frac{n-1}{2}$, waardoor het totale gemiddelde kleiner is dan $\frac{n}{2}$. Als $n$ wel het kwadraat is van een priemgetal, vinden we $\alpha(n) = \frac{1+\sqrt{n}+n}{3} < \frac{1+\frac{n-2}{2}+n}{3} = \frac{3n}{6} = \frac{n}{2}$. Dus $n > 6$ voldoet niet.

Ook $n = 4$ voldoet niet, want $\alpha(4) = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3}$ terwijl $\beta(4) = \frac{4}{2} = 2$.
Ten slotte controleren we dat $n = 1$ en $n = 6$ inderdaad voldoen:

- $n = 1$: Er geldt $\alpha(1) = \beta(1) = 1$.
- $n = 6$: Er geldt $\alpha(3) = \frac{1+2+3+6}{4} = 3$ en $\beta(6) = \frac{1+5}{2} = 3$.

We concluderen dat $\alpha(n) = \beta(n)$ dan en slechts dan als $n = 1$ of $n = 6$. $\square$

**Opgave 2.** Vind alle functies $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$2x^3zf(z) + yf(y) \geq 3yz^2f(x)$$

voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

---

**Oplossing.** Antwoord: alle functies van de vorm $f_{c,d}(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{als } x > 0 \\ d & \text{als } x = 0 \end{cases}$ met $c \geq 0$ en $d \leq 0$.

Invullen van $x = 0$ en $y = 1$ levert $f(1) \geq 3f(0)z^2$ voor alle $z \geq 0$. Als $f(0) > 0$, dan is de rechterkant van deze ongelijkheid onbegrensd, tegenspraak. Dus er geldt $f(0) \leq 0$.

Invullen van $z = 0$ levert $yf(y) \geq 0$, dus $f(y) \geq 0$ voor alle $y > 0$. In het bijzonder geldt $f(1) \geq 0$.
Invullen van $x = y$ en $z = 1$ levert

$$2y^3f(1) + yf(y) \geq 3yf(y),$$

dus $2y^3f(1) \geq 2yf(y)$, dus $f(y) \leq y^2f(1)$ voor $y > 0$.
Invullen van $z = y$ en $x = 1$ levert

$$2yf(y) + yf(y) \geq 3y^3f(1),$$

dus $3yf(y) \geq 3y^3f(1)$, dus $f(y) \geq y^2f(1)$ voor $y > 0$.
Samen levert dit $f(y) = y^2f(1)$ voor $y > 0$.

Schrijf $c = f(1)$ en $d = f(0)$. Dan weten we nu dus dat $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{als } x > 0 \\ d & \text{als } x = 0 \end{cases}$ met $c \geq 0$ en $d \leq 0$. We gaan nu deze functies controleren.

Merk eerst op dat $xf(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: voor $x = 0$ is dit triviaal en voor $x > 0$ geldt er $xf(x) = cx^3 \geq 0$ aangezien $c \geq 0$.

Voor $x = 0$ staat er $yf(y) \geq 3yz^2f(0)$, en dit klopt aangezien $yf(y) \geq 0$ en $3yz^2f(0) = 3yz^2d \leq 0$ voor $y, z \geq 0$.
Voor $y = 0$ staat er $2x^3zf(z) \geq 0$ en dit klopt. Voor $z = 0$ staat er $yf(y) \geq 0$ en dit klopt.

Neem nu aan dat $x, y, z > 0$. Dan geldt dus $f(x) = cx^2$, $f(y) = cy^2$, $f(z) = cz^2$ en moeten we bewijzen dat

$$2x^3zcz^2 + ycy^2 \geq 3yz^2cx^2$$

Aangezien $c \geq 0$ is het voldoende om te laten zien dat $2x^3z^3 + y^3 \geq 3yz^2x^2$ voor alle $x, y, z > 0$. Dit volgt uit de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde op de drie termen $x^3z^3$, $x^3z^3$ en $y^3$. Dus al deze functies voldoen. $\square$

**Opgave 3.** Speler Zero en speler One spelen een spel op een $n \times n$-bord ($n \geq 1$). De kolommen van dit $n \times n$-bord zijn genummerd met tweemachten, dus we hebben kolom 1, kolom 2, kolom 4 tot en met kolom $2^{n-1}$. Om en om zetten de spelers hun eigen getal (dus Zero een 0 en One een 1) in één van de lege vakjes. Speler 0 begint. Als het bord vol is, eindigt het spel en ontstaat er in elke rij een (omgekeerd binair) getal door de waardes van de vakjes met een 1 erin bij elkaar op te tellen. Dus als $n = 4$ dan hoort bij een rij met 0101 het getal $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 10$.

a) Voor welke natuurlijke getallen $n$ kan speler One er altijd voor zorgen dat minimaal één van de rijen deelbaar is door 4?

b) En voor welke natuurlijke getallen $n$ kan speler One er altijd voor zorgen dat minimaal één van de rijen deelbaar is door 3?

---

a) **Oplossing 1.** Merk eerst op dat als $n = 1$, het unieke vakje een 0 krijgt omdat speler Zero begint, dus in dit geval is het mogelijk.

We gaan nu bewijzen dat voor alle andere $n$ Zero kan voorkomen dat One wint. Omdat $4 \mid 2^k$ voor alle $k \geq 2$, bepalen alleen de eerste twee kolommen wie er wint. Als er een rij is met twee nullen aan het begin, dan wint speler One en anders speler Zero. We gaan bewijzen dat voor alle $n > 1$ Zero kan voorkomen dat One wint.

We zeggen "Zero blokkeert One" als Zero zijn 0 naast een 1 in de eerste twee vakjes van een rij zet. We noemen de eerste twee kolommen het linkergebied; het hele bord op de eerste twee kolommen na juist het rechtergebied.

Als $n$ oneven is, zet Zero als eerste een 0 in het rechtergebied. Er zijn dan nog een even aantal vakjes in zowel het rechtergebied als in het linkergebied. Zero speelt nu zo dat deze eigenschap behouden blijft na elke zet van hem, en dat bovendien het buurvakje van elk leeg vakje in het linkergebied ook leeg is. (In elke rij zijn de twee eerste vakjes dus beide leeg of beide bezet.) Elke keer als One een 1 zet in een van de gebieden, is er in dat gebied dus nog minstens 1 vakje meer leeg en speelt Zero een 0 in datzelfde gebied. Voor het linkergebied doet Zero dat door telkens de zojuist gespeelde 1 van One te blokkeren.

Als $n$ even is, zet Zero als eerste een 0 in het linkergebied. Er zijn nu links nog een oneven aantal vakjes en rechts een even aantal vakjes. Als One rechts een 1 speelt, speelt Zero ook rechts een 0. Als One links een 1 speelt op een nieuwe rij, blokkeert Zero deze meteen. Als One links een 1 speelt in de rij waar al een 0 stond, dan begint Zero links weer een nieuwe rij als dat kan door een 0 te spelen in het linkergebied zodat het vakje daarnaast (in het linkergebied) nog leeg is. Als er geen nieuwe rij is, dan zij alle rijen links gevuld met 01 of 10 en speelt Zero rechts. □

**Oplossing 2.** Speler Zero heeft de volgende tactiek: zet geen 0 in de eerste twee kolommen tenzij je niets anders meer kan doen. Zet in dat geval een 0 in een rij waarbij het andere vakje van de eerste twee vakjes al een 1 bevat, indien mogelijk. Als zo'n vakje niet bestaat zet je hem in een rij, die nog geen 0 in de eerste twee vakjes heeft. We gaan laten zien dat Zero dit de hele tijd kan blijven doen, zodat Zero wint omdat er dan nooit een rij is die begint met twee keer een 0.

We beweren dat er met deze tactiek op elk moment hoogstens één rij is waarvan de eerste twee vakjes $(0, \emptyset)$ zijn. Stel namelijk dat Zero een nul neerzet, naast een leeg vakje. Dan is het rechtergebied vol wegens de tactiek. Wanneer One hierna een zet doet, vervangt dit de $(0, \emptyset)$-rij door een $(0, 1)$-rij, of ontstaat er een $(1, \emptyset)$-rij waar Zero in kan/moet spelen. Zero wordt dus nooit geforceerd om een tweede $(0, \emptyset)$-rij te creëren, of een $(0, 0)$-rij. □

b) **Oplossing.** Zero kan er alleen voor zorgen dat geen enkele rij deelbaar is door 3 als $n \equiv 2 \mod 4$.

Merk allereerst op dat modulo 3 de kolommen als $1, 2, 1, 2, \ldots$ genummerd zijn. Als $n$ even is, zijn er een even aantal vakjes en heeft One de laatste beurt; als $n$ echter oneven is, zijn er een oneven aantal vakjes en heeft Zero de laatste beurt.

Als $n = 4k$ komen zowel de 1 als de 2 een even aantal keer per rij voor. Nu heeft One de volgende tactiek: spiegel speler Zero. Als Zero een nul zet in een rij met waarde 1 dan zet One een 1 in een vakje in diezelfde rij die ook waarde 1 heeft. Als Zero een nul zet in een rij met waarde 2, dan zet One een 1 in een vakje met waarde 2 in diezelfde rij. Omdat er in elke rij een even aantal 1-en en 2-en zijn, kan One dit altijd blijven doen. Nu geldt dat er op het einde $k$ vakjes met waarde 1 het getal 1 hebben en $k$ vakjes met waarde 2 die het getal 1 van One hebben gekregen. Dus is de som van elke rij $3k \equiv 0 \mod 3$.

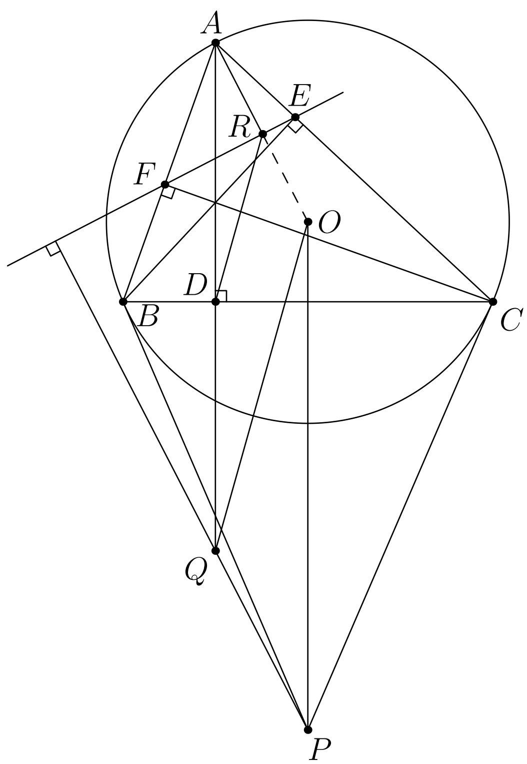
Als $n = 4k + 1$, zijn er $2k + 1$ vakjes met waarde 1 en $2k$ vakjes met waarde 2. One wil een rij maken zodat in exact $k$ vakjes van waarde 1 een 1 staat en in exact $k$ vakjes van waarde 2. One gebruikt nu opnieuw de spiegeltactiek. Als One echter niet kan spiegelen, dan zet One een 1 in een willekeurig vakje met waarde 1. Pas als dit ook niet meer kan zet hij een 1 neer in een vakje met waarde 2. Omdat er exact $2k$ vakjes per rij van waarde 2 zijn, kan One er met deze tactiek voor zorgen dat in elke rij exact $k$ vakjes met waarde 2 het getal 1 krijgen. Daarnaast zorgt deze tactiek ervoor dat er minimaal één rij is met $k + 1$ nullen op vakjes met waarde 1 (en dus $k$ met het getal 1). Voor deze rij geldt dat de som gelijk is aan $k + 2k = 3k \equiv 0 \mod 3$.

Als $n = 4k+3$, zijn er $2k+2$ vakjes met waarde 1 en $2k+1$ vakjes met waarde 2. One begint een 1 te zetten in een willekeurig vakje van waarde 2 in een van de rijen waar Zero niet zijn eerste vakje heeft geplaatst. Vervolgens past One de kopieer techniek toe op deze specifieke rij. Dus als Zero erbuiten plaatst, doet One dat ook en als Zero erbinnen plaatst dan doet One dat ook en zet zijn 1 op een vakje met dezelfde waarde. Omdat er nu een oneven aantal lege vakjes buiten deze rij zijn, kan het zo zijn dat One een vakje in de speciale rij moet zetten, terwijl Zero de beurt daarvoor dat niet gedaan heeft. Er zijn voor deze zet nog $2k$ vakjes met waarde 2 over en $2k + 2$ met waarde 1. Door de kopieertactiek na deze zet weer toe te passen (en het feit dat Zero de laatste zet heeft) kan One ervoor zorgen dat zowel One als Zero $k$ vakjes kiest met waarde 2 en $k+1$ vakjes met waarde 1. Nu heeft de speciale rij exact $k+1$ vakjes met waarde 1 en $k+1$ met waarde 2, waardoor de som $3(k+1) \equiv 0 \mod 3$ is en One wint.

Als $n = 4k+2$, zijn er $2k+1$ vakjes met waarde 1 en $2k+1$ vakjes met waarde 2. Dan kan Zero voorkomen dat One wint. Ditmaal is het juist Zero die vanaf zijn tweede beurt de kopieertactiek toepast. Als er echter geen vakjes meer zijn met dezelfde waarde in dezelfde rij, dan zet Zero het vakje in dezelfde rij met de andere waarde. Doordat in dit geval One de laatste beurt heeft, kan Zero er met deze tactiek voor zorgen dat beide exact $2k + 1$ vakjes in elke rij bezetten en dat Zero minimaal $k$ vakjes met waarde 1 en $k$ vakjes met waarde 2 in de rij bezet. Dit betekent dat de som in elke rij ofwel $k + 2(k + 1) \equiv 2 \mod 3$ of $k + 1 + 2k \equiv 1 \mod 3$ is. In dit geval kan Zero dus altijd voorkomen dat One wint. $\square$

**Opgave 4.** Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek zodanig dat $|AB| < |AC|$ met omgeschreven cirkel $\Gamma$ met middelpunt $O$. De punten $D$, $E$ en $F$ worden geconstrueerd als de voetpunten van de hoogtelijnen vanuit resp. $A$, $B$ en $C$. Het snijpunt van de raaklijnen aan $\Gamma$ door $B$ en $C$ noemen we $P$. De lijn door $P$ loodrecht op $EF$ snijdt de lijn $AD$ in het punt $Q$. Zij $R$ de loodrechte projectie van $A$ op $EF$.

Bewijs dat de lijnen $DR$ en $OQ$ parallel zijn.




---

**Oplossing 1.** Aangezien $O$ het middelpunt van de omgeschreven cirkel is, rekenen we uit dat

$$\begin{aligned} \angle BAO &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) \\ &= 90^\circ - \angle ACB \\ &= 90^\circ - \angle EFA \\ &= \angle FAR, \end{aligned}$$

waar we ook hebben gebruikt dat $BCEF$ een koordenvierhoek is wegens Thales en dat $R$ de loodrechte projectie is van $A$ op $EF$. Hieruit concluderen we dat $A$, $R$ en $O$ collineair zijn. Om te laten zien dat $DR$ en $OQ$ parallel zijn, is het dus voldoende om aan te tonen dat $\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|AO|}{|AQ|}$.

Wegens de koordenvierhoek $BCEF$ geldt dat $\triangle AEF \sim \triangle ABC$. Onder deze gelijkvormigheid gaat de hoogtelijn $AR$ over in de hoogtelijn $AD$. (Alternatief kan men gewoon laten zien dat $\triangle ARE \sim \triangle ADB$.) Hieruit volgt dat $\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AB|}$.

Aan de andere kant weten we dat

$$\angle POB = \tfrac{1}{2}\angle COB = \angle CAB = \angle EAB$$

wegens symmetrie en het feit dat $O$ het middelpunt is van de omgeschreven cirkel. Ook geldt dat $\angle OBP = 90° = \angle AEB$. Dus we vinden dat $\triangle POB \sim \triangle BAE$ waaruit volgt dat $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|BO|}{|OP|}$

Verder zijn de lijnen $AO$ en $PQ$ evenwijdig omdat ze allebei loodrecht staan op $EF$, en zijn de lijnen $AQ$ en $OP$ evenwijdig omdat ze allebei loodrecht staan op $BC$. Dit betekent dat $AOPQ$ een parallellogram is, en in het bijzonder dat $|OP| = |AQ|$. Ook weten we natuurlijk dat $|BO| = |AO|$. We concluderen dus dat

$$\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|BO|}{|OP|} = \frac{|AO|}{|AQ|},$$

waaruit volgt dat $DR$ en $OQ$ parallel zijn. □

**Oplossing 2.** Net als in oplossing 1 geldt dat $A$, $R$ en $O$ collineair zijn. We gaan weer bewijzen dat $\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|AO|}{|AQ|}$.

Wegens de koordenvierhoek $BCEF$ geldt dat $\triangle AEF \sim \triangle ABC$. Onder deze gelijkvormigheid gaat de hoogtelijn $AR$ over in de hoogtelijn $AD$. Noem $M$ het midden van $BC$. Dat is wegens Thales het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $BCEF$. Dus berekenen we dat $\angle EFM = \angle FEM = \frac{1}{2}(180° - \angle EMF) = 90° - \angle ECF = \angle BAC = \angle FAE$. Hieruit volgt dat $EM$ en $FM$ raaklijnen zijn aan de omgeschreven cirkel van $\triangle AEF$ (wegens raaklijnomtrekshoekstelling). Dus correspondeert $M$ met $P$ in de gelijkvormigheid tussen $\triangle AEF$ en $\triangle ABC$.

Om het punt te vinden dat met $Q$ correspondeert in $\triangle AEF$ moeten we in deze driehoek nu de voetpunten van $E$ en $F$ construeren. Deze noemen we respectievelijk $B'$ en $C'$. Dan geldt dat $\angle AB'C' = \angle AEF = \angle ABC$. Dus $B'C' \parallel BC$. Bedenk dat $Q$ gedefinieerd t.o.v. $\triangle ABC$ is als het snijpunt van $AD$ met de loodlijn door $P$ op $EF$. Het corresponderende punt van $\triangle AEF$ is dus het snijpunt van $AR$ met de loodlijn door $M$ op $B'C' \parallel BC$, oftewel het punt $O$. De verhouding tussen corresponderende lijnstukken is hetzelfde, dus

$$\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|AO|}{|AQ|},$$

waaruit volgt dat $DR$ en $OQ$ parallel zijn. □