NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets I

woensdag 5 juni 2024

Opgave 1. Voor een positief geheel getal n definieren we $\alpha(n)$ als het gemiddelde van alle positieve delers van n, en $\beta(n)$ als het gemiddelde van alle positieve gehele getallen $k \leq n$ zodat $\text{ggd}(k, n) = 1$.

Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor geldt dat $\alpha(n) = \beta(n)$.

Opgave 2. Vind alle functies $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$2x^3 z f(z) + y f(y) \geq 3yz^2 f(x)$$

voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Opgave 3. Speler Zero en speler One spelen een spel op een $n \times n$-bord ($n \geq 1$). De kolommen van dit $n \times n$-bord zijn genummerd met tweemachten, dus we hebben kolom 1, kolom 2, kolom 4 tot en met kolom 2^{n-1}. Om en om zetten de spelers hun eigen getal (dus Zero een 0 en One een 1) in één van de lege vakjes. Speler 0 begint. Als het bord vol is, eindigt het spel en ontstaat er in elke rij een (omgekeerd binair) getal door de waardes van de vakjes met een 1 erin bij elkaar op te tellen. Dus als $n = 4$ dan hoort bij een rij met 0101 het getal $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 10$.

a) Voor welke natuurlijke getallen n kan speler One er altijd voor zorgen dat minimaal één van de rijen deelbaar is door 4?

b) En voor welke natuurlijke getallen n kan speler One er altijd voor zorgen dat minimaal één van de rijen deelbaar is door 3?

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek zodanig dat $|AB| < |AC|$ met omgeschreven cirkel Γ met middelpunt O. De punten D, E en F worden geconstrueerd als de voetpunten van de hoogtelijnen vanuit resp. A, B en C. Het snijpunt van de raaklijnen aan Γ door B en C noemen we P. De lijn door P loodrecht op EF snijdt de lijn AD in het punt Q. Zij R de loodrechte projectie van A op EF.

Bewijs dat de lijnen DR en OQ parallel zijn.