Maarttoets

vrijdag 8 maart 2024

Uitwerkingen

Opgave 1. Vind alle paren priemgetallen (p, q) waarvoor er positieve gehele (m, n) bestaan zodat

$$(p+q)^m = (p-q)^n$$

Oplossing. De enige deler die $p-q$ en $p+q$ gemeen kunnen hebben, is 2, want p en q zijn verschillende priemgetallen. Inderdaad, een deler d van $p+q$ en $p-q$ is ook een deler van $(p+q)+(p-q) = 2p$ en van $(p+q)-(p-q) = 2q$. En we weten dat $\text{ggd}(2p, 2q) = 2$, dus d moet een deler zijn van 2.

Aangezien elke priemfactor van $|p-q|$ of $p+q$ wegens de gegeven vergelijking ook een priemfactor van de ander moet zijn, weten we nu dat $|p-q|$ en $p+q$ allebei machten van 2 zijn (ongelijk aan 1). Maar de grootste gemeenschappelijke deler is 2, dus de kleinste tweemacht van de twee (en dat moet wel $|p-q|$ zijn) is gelijk aan 2. Dus $|p-q| = 2$ en $p+q$ is een tweemacht. Er zit dus precies één getal tussen p en q, namelijk $\frac{p+q}{2}$. Omdat $p+q$ is een tweemacht is, is $p+q$ niet deelbaar door 3. Dus $\frac{p+q}{2}$ is ook niet deelbaar door 3. Aangezien van drie opvolgende getallen er één deelbaar moet zijn door 3, volgt hieruit dat p of q deelbaar is door 3. Aangezien 1 geen priemgetal is, moet de kleinste van p en q gelijk zijn aan 3 en de ander aan 5. We vinden twee oplossingen, $(p, q) = (3, 5)$ en $(p, q) = (5, 3)$, die beide voldoen. $\square$

Opgave 2. We definiëren een rij met $a_1 = 850$ en

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n - 1}$$

voor $n \geq 1$. Bepaal alle waarden van n waarvoor geldt dat $\lfloor a_n \rfloor = 2024$.

Hierbij staat de entier $\lfloor a \rfloor$ van een reëel getal a voor het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan a.

Oplossing 1. Antwoord: de enige waarde die voldoet is $n = 1175$.

Als eerst merken we op dat we de recursie kunnen herschrijven als

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1 + 1}{a_n - 1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} + \frac{1}{a_n - 1} = a_n + 1 + \frac{1}{a_n - 1}. \tag{1}$$

Omdat het verschil van $a_{n+1} - a_n > 1$, is er hoogstens één waarde van n die voldoet. Nu gaan we laten zien dat $n = 1175$ inderdaad voldoet. Ten eerste geeft het bovenstaande dat

$$\begin{aligned} a_{1175} &= a_1 + 1174 + \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_{1174} - 1} \\ &> 850 + 1174 \\ &= 2024. \end{aligned}$$

Algemener volgt uit (**??**) analoog dat $a_n \geq 849 + n$. Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_{1174} - 1} &\leq \frac{1}{849} + \frac{1}{850} + \cdots + \frac{1}{2022} \\ &< 51 \cdot \frac{1}{849} + 100 \cdot \frac{1}{900} + 200 \cdot \frac{1}{1000} + 400 \cdot \frac{1}{1200} + 400 \cdot \frac{1}{1600} + 23 \cdot \frac{1}{2000} \\ &= \frac{17}{283} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{23}{2000} \\ &= \frac{17}{283} + \frac{20 + 36 + 60 + 45}{180} + \frac{23}{2000} \\ &< \frac{11}{180} + \frac{161}{180} + \frac{3}{180} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Hiermee concluderen we dat inderdaad

$$a_{1175} \leq 850 + 1174 + \frac{1}{849} + \frac{1}{850} + \cdots + \frac{1}{2022} < 2024 + 1.$$

$\square$

Oplossing 2. In oplossing 1 hebben we groepjes van opvolgende breuken afgeschat op de grootste breuk in elk groepje. Naast andere groepjes kunnen we het ook anders aanpakken door paren breuken te maken vanuit het midden. Dan is de som van elk paar breuken kleiner dan het paar van de breuken aan de uiteinden. Inderdaad, voor $0 < x < 1173$ geldt

$$(849 + x)(2022 - x) = 849 \cdot 2022 + 1173x - x^2 = 849 \cdot 2022 + x(1173 - x) > 849 \cdot 2022.$$

Als we dit toepassen op het fractionele deel van a_{1174} vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{1}{849} + \frac{1}{850} + \cdots + \frac{1}{2022} &= \left(\frac{1}{849} + \frac{1}{2022}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1435} + \frac{1}{1436}\right) \\
&= \frac{2871}{849 \cdot 2022} + \ldots + \frac{2871}{1435 \cdot 1436} \\
&< 587 \cdot \frac{2871}{849 \cdot 2022} = \frac{587 \cdot 319}{283 \cdot 674} \\
&< \frac{587 \cdot 320}{280 \cdot 674} = \frac{587 \cdot 8}{7 \cdot 674} \\
&= \frac{4696}{4718} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

□

Opmerking. Een breuk van producten kan je vaak afschatten zonder alles uit te rekenen. Zo zouden we de laatste stap bijvoorbeeld ook kunnen doen met behulp van $7 \cdot 674 = 7 \cdot 587 + 7 \cdot 87 > 7 \cdot 587 + 587 = 8 \cdot 587$.

Opgave 3. Vind alle paren (a,b) van positieve gehele getallen zodat $f(x) = x$ de enige functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is die voldoet aan

$$f^a(x)f^b(y) + f^b(x)f^a(y) = 2xy$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Hierin staat $f^n(x)$ voor het n keer toepassen van f op x, dus $f^1(x) = f(x)$ en $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

Oplossing 1. We gaan bewijzen dat precies alle paren (a,b) met $\text{ggd}(a,b) = 1$ en met $a+b$ oneven voldoen.

Neem eerst aan dat $\text{ggd}(a,b) = n \neq 1$. Bekijk de functie

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{als } \lfloor x \rfloor \not\equiv 0 \mod n \\ x+1-n & \text{als } \lfloor x \rfloor \equiv 0 \mod n \end{cases}$$

Deze functie is ongelijk aan $\text{id}_{\mathbb{R}}$ omdat $n \neq 1$. Dan geldt $\lfloor g(x) \rfloor \equiv \lfloor x \rfloor + 1 \mod n$. Dus de getallen $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor g(x) \rfloor$, $\lfloor g(g(x)) \rfloor$, …, $\lfloor g^{n-1}(x) \rfloor$ hebben alle restklassen $\mod n$. Dus $g^n(x) = x + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ keer}} - n = x$. Met inductie volgt hieruit $g^{cn}(x) = x$ voor alle natuurlijke c, dus omdat $n \mid a, b$ geldt ook $g^a(x) = x$ en $g^b(x) = x$. Dus

$$g^a(x)g^b(y) + g^b(x)g^a(y) = xy + xy = 2xy$$

Dus de functie $f = g \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$ voldoet aan de functievergelijking in dit geval.

We bekijken nu het geval dat $a+b$ even is. Neem dan de functie $h(x) = -x$. Dan volgt uit eenvoudige inductie dat $h^c(x) = (-1)^c x$. Dus

$$h^a(x)h^b(y) + h^b(x)h^a(y) = (-1)^{a+b}xy + (-1)^{a+b}xy = 2xy$$

Dus de functie $f = h \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$ voldoet aan de functievergelijking.

Neem nu aan dat $\text{ggd}(a,b) = 1$ en dat $a+b$ oneven is. Met $x = y$ zien we

$$f^a(x)f^b(x) = x^2.$$

Als we de funcievergelijking met $f^a(x)f^a(y)$ vermenigvuldigen, krijgen we

$$\begin{aligned} 2(xf^a(y))(yf^a(x)) &= f^a(x)f^b(y)f^a(x)f^a(y) + f^b(x)f^a(y)f^a(x)f^a(y) \\ &= ((f^a(x))^2 \underbrace{f^a(y)f^b(y)}_{=y^2} + ((f^a(y))^2 \underbrace{f^a(x)f^b(x)}_{=x^2} \\ &= (yf^a(x))^2 + (xf^a(y))^2 \end{aligned}$$

Dit is het gelijkheidsgeval van de ongelijkheid van het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde. Nog mooier zien we dat we het kunnen herschrijven als

$$\Big(yf^a(x) - xf^a(y)\Big)^2 = 0.$$

Dus we concluderen dat $yf^a(x) = xf^a(y)$. Met $y = 1$ zien we $f^a(x) = c_1x$ voor een zekere $c_1 \in \mathbb{R}$. Analoog geeft vermenigvuldiging met $f^b(x)f^b(y)$ dat $f^b(x) = c_2x$ voor een zekere $c_2 \in \mathbb{R}$. Als een van de constantes gelijk aan 0 zou zijn, dan is de linkerkant van de functievergelijking altijd gelijk aan 0, maar rechts is dat niet. Beide constantes zijn dus niet gelijk aan 0. Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$ bestaan er gehele p en q zodat $ap + bq = 1$. Neem z.v.v.a. aan dat p positief is en q negatief en schrijf $r = -q$. Dan geldt $ap = 1 + rb$ met p en r positief. We zien

$$\begin{aligned} c_1^p x = (f^a)^p(x) &= f^{ap}(x) \\ &= f^{1+rb}(x) \\ &= f((f^b)^r(x)) \\ &= f(c_2^r x) \end{aligned}$$

Dus $f(x) = \frac{c_1^p}{c_2^r}x = dx$. Als we deze functie invullen zien we $2d^{a+b}xy = 2xy$, dus $d^{a+b} = 1$. Hieruit volgt $d = 1$ omdat $a + b$ oneven is. Dit betekent dat $f(x) = x$ de enige functie is die potentieel voldoet. Het is makkelijk te zien dat deze functie ook daadwerkelijk voldoet, dus alle paren (a, b) van natuurlijke getallen waarvoor geldt dat $f(x) = x$ de enige functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is die voldoet aan

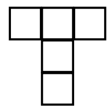
$$f^a(x)f^b(y) + f^b(x)f^a(y) = 2xy$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ zijn precies de paren (a, b) waarbij $a + b$ oneven is en $\text{ggd}(a, b) = 1$. $\square$

Oplossing 2. Uit $f^a(x) = c_1x$ en $f^b(x) = c_2x$ kunnen we ook direct afleiden dat $c_1 = c_2 = 1$, zelfs zonder te gebruiken dat de $\text{ggd}(a, b) = 1$. Inderdaad, als we dit invullen in de oorspronkelijke vergelijking, krijgen we $c_1xc_2y + c_2xc_1y = 2xy$. Hieruit volgt dat $c_1c_2 = 1$. Verder geldt $c_1^b x = (f^a)^b(x) = (f^b)^a(x) = c_2^a x = \frac{1}{c_1^a}x$, dus $c_1^{a+b} = 1$. Omdat $a + b$ oneven is, vinden we dus dat $c_1 = 1$ waaruit ook volgt dat $c_2 = 1$. We concluderen dat $f^a(x) = x$ en $f^b(x) = x$.

Om hieruit af te leiden dat $f(x) = x$ gebruiken we nu alsnog $\text{ggd}(a, b) = 1$ zodat we Bézout kunnen toepassen zoals in oplossing 1, of het algoritme van Euclides. $\square$

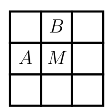
Opgave 4. We hebben een $n \times n$-bord met $n \geq 3$ waarvan elk vakje afzonderlijk wit of zwart gekleurd kan worden. Elke zet veranderen we de kleur van vijf gekozen vakjes in het pentomino patroon



dat geroteerd mag worden. Aan het begin zijn alle vakjes wit. Bepaal voor welke n het mogelijk is alle vakjes zwart te maken na een eindig aantal zetten.

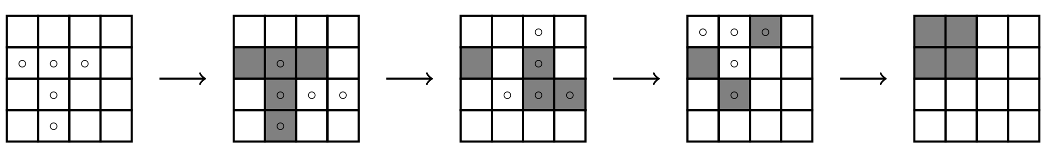
Oplossing. Antwoord: dit kan precies als n deelbaar is door 2 of 3, met uizondering van 3 zelf.

We laten eerst zien dat voor $n = 3$ de herkleuring niet mogelijk is. We beschouwen de vakjes A, B en M in het volgende figuur.



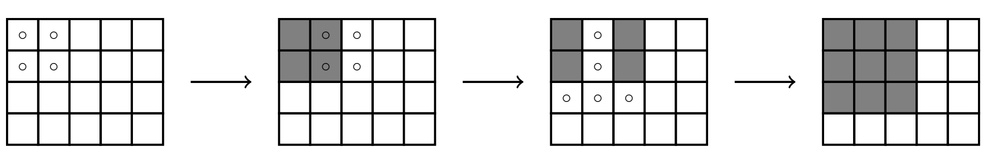
Dan bevat elke pentomino vakje M en elke pentomino bevat A óf B. Aangezien A en B een ovenen aantal keer gekozen moeten worden om ze zwart te maken, is in zo'n geval M een oneven + oneven = even keer gekozen. Dus M is dan wit en we concluderen dat we nooit alle vakjes tegelijk zwart kunnen maken.

Stel nu dat $n \geq 4$. Als n deelbaar is door 2 dan gebruiken we herhaaldelijk de volgende procedure:



Hiervoor delen we het bord op in $(\frac{1}{2}n)^2$ blokken van 2×2. Omdat $n \geq 4$ kunnen we een 4×4-blok om elk 2×2-blok vinden zodat we de procedure kunnen toepassen.

Als n deelbaar is door 3 en ongelijk aan 3 zelf dan is n minstens 6. Met behulp van ons werk hierboven hebben we de volgende procedure voor een 3×3-blok met voldoende ruimte:

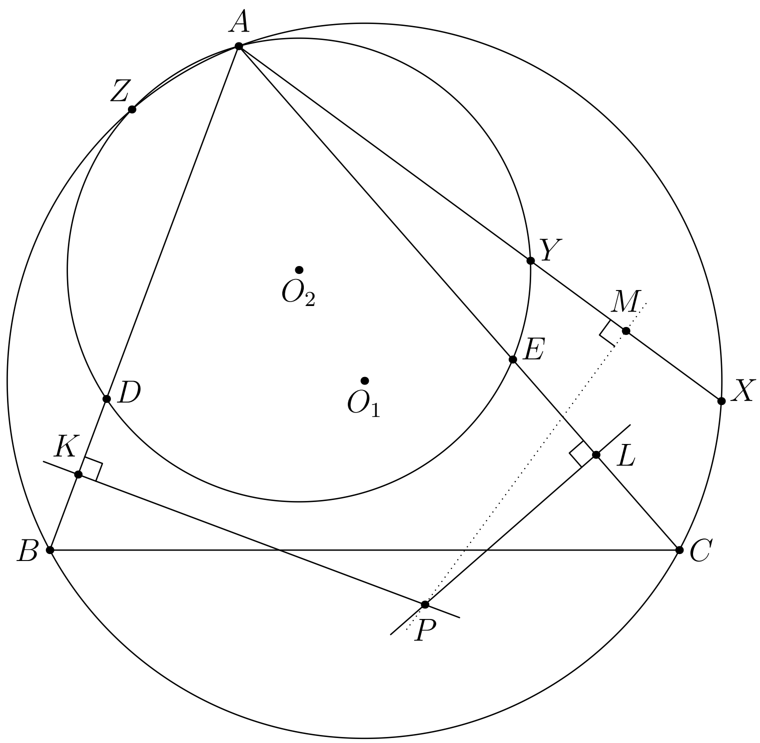


Om dit herhaaldelijk toe te passen, delen we het bord op in $(\frac{1}{3}n)^2$ blokken van 3×3. Omdat $n \geq 6$ kunnen we om elk 3×3-blok het benodigde 4×5-blok vinden zodat we de procedure kunnen toepassen.

Stel nu dat n niet deelbaar is door 2 of 3. Dan kleuren we de kolommen cyclisch met de kleuren $0, 1, 2 \mod 3$. Elke pentomino heeft altijd 3 vakjes van dezelfde kleur, en 1 vakje van beide andere kleuren. Dit betekent dat elke zet een oneven aantal vakjes van elke kleur wisselt tussen wit/zwart. Dus de pariteit van het aantal zwarte vakjes is altijd hetzelfde voor alledrie de kleuren. Omdat n niet deelbaar is door 3 is er daarentegen een kleur die één kolom meer heeft dan een andere kleur. Het verschil tussen het aantal vakjes van deze twee kleuren is dus n, wat oneven is aangezien n ook niet deelbaar is door 2. We concluderen dat deze twee kleuren nooit beide alleen maar zwarte vakjes kunnen hebben.

$\square$

Opgave 5. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek met $|AB| < |AC|$. Gegeven zijn punten D en E op respectievelijk de lijnstukken AB en AC. Zij P een punt zodanig dat $|PB| = |PD|$ en $|PC| = |PE|$. Zij X een punt op de boog AC van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ die niet B bevat. De lijn XA snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ADE$ nogmaals in Y. Bewijs dat $|PX| = |PY|$.



Oplossing 1. We bekijken de configuratie zoals in het plaatje waarbij Y op de boog AE ligt. Wanneer Y op de boog AZ ligt, klapt er een hoekje om maar dit geval gaat verder analoog. Zij Z het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$. Dan vinden vinden we met gericht hoekenjagen dat $\angle ZBC = \angle ZAC = \angle ZAE = \angle ZDE$ en evenzo $\angle ZCB = \angle ZED$. Dus is Z het centrum van de draaivermenigvuldiging $\triangle ZBC \sim \triangle ZDE$. Analoog geldt $\triangle ZCX \sim \triangle ZEY$. Dus vinden we $\triangle ZBD \sim \triangle ZCE \sim \triangle ZXY$. Deze gelijkvormigheden nemen de middens mee van de zijden BD, CE en XY, die we respectievelijk K, L en M noemen. Hierdoor krijgen we dat $\angle AKZ = \angle ALZ = \angle AMZ$, dus $AZKLM$ is een koordenvijfhoek. Aangezien $\angle AKP = \angle ALP = 90°$ ligt P ook op deze cirkel. Hieruit concluderen we dan weer dat $\angle AMP = 90°$, oftewel dat P op de middelloodlijn van XY ligt. $\square$

Oplossing 2. Laat O_1 en O_2 de middelpunten zijn van de omgeschreven cirkels van respectievelijk $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$. Zij O_3 nu het midden van O_1O_2 en zij Γ de cirkel door

A met middelpunt O_3. We definiëren P als de antipode van A in Γ. Nu projecteren we alles op de lijn BD. Laat P_1, P_2 en P_3 de projecties zijn van O_1, O_2 en O_3 en zij K de projectie van P. Dan geldt dat

$$|AK| = 2|AP_3| = |AP_1| + |AP_2| = \tfrac{1}{2}(|AB| + |AD|).$$

Dit betekent dat K het midden is van BD, oftewel P ligt op de middelloodlijn van BD. Net zo ligt P op de middeloodlijn van CE en op de middelloodlijn van XY. Dus dit is inderdaad de P van de opgave, en dit punt ligt even ver van X als Y. $\square$