NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Maarttoets

vrijdag 8 maart 2024

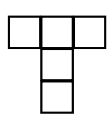
Opgave 1. Vind alle paren priemgetallen (p,q) waarvoor er positieve gehele (m,n) bestaan zodat
$$(p+q)^m = (p-q)^n$$

Opgave 2. We definiëren een rij met $a_1 = 850$ en
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n - 1}$$
voor $n \geq 1$. Bepaal alle waarden van n waarvoor geldt dat $\lfloor a_n \rfloor = 2024$.

Hierbij staat de entier $\lfloor a \rfloor$ van een reëel getal a voor het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan a.

Opgave 3. Vind alle paren (a,b) van positieve gehele getallen zodat $f(x) = x$ de enige functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is die voldoet aan
$$f^a(x)f^b(y) + f^b(x)f^a(y) = 2xy$$
voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Hierin staat $f^n(x)$ voor het n keer toepassen van f op x, dus $f^1(x) = f(x)$ en $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

Opgave 4. We hebben een $n \times n$-bord met $n \geq 3$ waarvan elk vakje afzonderlijk wit of zwart gekleurd kan worden. Elke zet veranderen we de kleur van vijf gekozen vakjes in het pentomino patroon



dat geroteerd mag worden. Aan het begin zijn alle vakjes wit. Bepaal voor welke n het mogelijk is alle vakjes zwart te maken na een eindig aantal zetten.

Opgave 5. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek met $|AB| < |AC|$. Gegeven zijn punten D en E op respectievelijk de lijnstukken AB en AC. Zij P een punt zodanig dat $|PB| = |PD|$ en $|PC| = |PE|$. Zij X een punt op de boog AC van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ die niet B bevat. De lijn XA snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ADE$ nogmaals in Y. Bewijs dat $|PX| = |PY|$.