IMO-selectietoets III

vrijdag 9 juni 2023

Uitwerkingen

Opgave 1. Vind alle priemgetallen p waarvoor het natuurlijke getal

$$3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$$

hoogstens 6 positieve delers heeft.

Opmerking. Je mag gebruiken dat 9049 een priemgetal is.

Oplossing. Antwoord: de enige priemgetallen waarvoor dit geldt zijn 2, 3 en 5.

We schrijven $f(p) = 3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$. Dan berekenen we de priemfactorisaties $f(2) = 3 \cdot 11$, $f(3) = 7 \cdot 11^2$ en $f(5) = 7 \cdot 9049$. Die hebben dus respectievelijk 4, 6 en 4 delers. Het aantal delers van $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ is namelijk $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_n + 1)$.

Stel nu dat $p > 5$. Modulo 6 hebben we dan maar twee mogelijkheden voor p te weten $p \equiv 1, -1 \mod 6$, anders zou p een factor 2 of 3 hebben. De kleine stelling van Fermat vertelt ons dat $a^6 \equiv 1 \mod 7$ (zolang $a \not\equiv 0 \mod 7$), dus deze twee mogelijkheden komen uit op

$$\begin{aligned} f(p) &\equiv 3^1 + 4^1 + 5^1 + 9^1 - 98 \equiv 3 + 4 + 5 + 9 + 0 \equiv 0 \mod 7 \quad \text{als } p \equiv 1 \mod 6, \\ f(p) &\equiv 3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1} + 9^{-1} - 98 \equiv 5 + 2 + 3 + 4 + 0 \equiv 0 \mod 7 \quad \text{als } p \equiv -1 \mod 6. \end{aligned}$$

De multiplicatieve inverses in de tweede regel kunnen eenvoudig gecontroleerd worden door ze te vermenigvuldigen met de getallen in de rij erboven. We concluderen dat $7 \mid f(p)$ voor alle $p > 5$. Alternatief geldt modulo 7 dat $f(p) \equiv 3^p + (-3)^p + 5^p + (-5)^p - 0 \equiv 0$ voor oneven p.

Modulo 10 hebben we vier mogelijkheden voor p te weten $p \equiv 1, 3, -3, -1 \mod 10$, anders zou p een factor 2 of 5 hebben. Aangezien $a^{10} \equiv 1 \mod 11$ (zolang $a \not\equiv 0 \mod 11$), komen deze vier mogelijkheden uit op

$$\begin{aligned}
3^1+4^1+5^1+9^1-98 &\equiv 3+4+5+9+1 \equiv 0 \mod 11 \qquad \text{als } p \equiv 1 \mod 10,\\
3^3+4^3+5^3+9^3-98 &\equiv 5+9+4+3+1 \equiv 0 \mod 11 \qquad \text{als } p \equiv 3 \mod 10,\\
3^{-3}+4^{-3}+5^{-3}+9^{-3}-98 &\equiv 9+5+3+4+1 \equiv 0 \mod 11 \qquad \text{als } p \equiv -3 \mod 10,\\
3^{-1}+4^{-1}+5^{-1}+9^{-1}-98 &\equiv 4+3+9+5+1 \equiv 0 \mod 11 \qquad \text{als } p \equiv -1 \mod 10.
\end{aligned}$$

Voor de tweede regel moet je gewoon de derdemachten uitrekenen, zoals $5^3 = 125 = 11 \cdot 11 + 4$. Voor de derde en vierde regel kunnen we weer eenvoudig de multiplicatieve inverses vinden. We concluderen dat $11 \mid f(p)$ voor alle $p > 5$.

Nu merken we op dat voor $p > 5$ geldt dat $f(p) > 9^5 = 9 \cdot 81 \cdot 81 > 7 \cdot 11 \cdot 77$. Dus we kunnen $f(p)$ schrijven als $f(p) = 7 \cdot 11 \cdot d$ met $d > 77$. Dan hebben we minstens 8 verschillende delers, te weten

$$1 < 7 < 11 < 77 < d < 7d < 11d < 77d.$$

Dus geen enkel priemgetal groter dan 5 voldoet aan de voorwaarde. $\square$

Opgave 2. Elke scholier in Nederland krijgt een eindig aantal kaartjes. Op elk kaartje staat een reël getal in het interval $[0, 1]$. (De getallen op verschillende kaartjes hoeven niet verschillend te zijn.) Vind het kleinste reële getal $c > 0$ waarvoor het volgende geldt, onafhankelijk van de getallen op de kaartjes die iedereen heeft gekregen.

> Elke scholier waarvan de som van de getallen op de kaartjes hoogstens 1000 is, kan de kaartjes over 100 dozen verdelen zo dat de som van de kaartjes in elke doos hoogstens c is.

Oplossing. Stel dat een van de scholieren 1001 kaartjes heeft gekregen met elk het getal $\frac{1000}{1001}$. Aangezien de som van de kaartjes 1000 is, moet deze scholier de kaartjes over de 100 dozen kunnen verdelen. Wegens het ladenprincipe is er minstens een doos met 11 kaartjes. De som van deze 11 kaartjes is $11 \cdot \frac{1000}{1001} = 11(1 - \frac{1}{1001}) = 11 - \frac{11}{1001} = 11 - \frac{1}{91}$. We gaan nu laten zien dat dit de kleinst mogelijke waarde is, $c = 11 - \frac{1}{91}$.

Voor een willekeurige scholier kiezen we eerst die verdelingen waarbij het maximum van de sommen van de kaartjes per doos zo laag mogelijk is, en uit deze verdelingen kiezen we vervolgens een verdeling waarbij het minst aantal dozen dit maximum aanneemt. Laat $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_{100}$ de totale waarde van de 100 dozen in deze verdeling zijn, geordend van laag naar hoog (waarbij de laatste k gelijk zijn aan het maximum). Omdat de som van alle kaartjes hoogstens 1000 is, merken we op dat

$$99d_1 + d_{100} \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_{100} \leq 1000.$$

Aan de andere kant mag het verplaatsen van een positief kaartje van doos (met som) d_{100} naar doos (met som) d_1 geen betere verdeling opleveren per aanname: dus geen verdeling met een lager maximum of met minder dan k dozen van deze maximale waarde. Dit betekent dat de nieuwe waarde van d_1 minstens gelijk is aan d_{100}. Als $d_{100} \leq 10$ zijn we direct klaar, want $10 < 11 - \frac{1}{91}$. We mogen dus aannemen dat $d_{100} > 10$. Aangezien elk kaartje hoogstens 1 is, betekent dit dat doos d_{100} minstens 11 positieve kaartjes bevat. Dit impliceert dan weer dat er een kaartje in deze doos zit met positieve waarde hoogstens $\frac{d_{100}}{11}$. Als we dit kaartje naar doos d_1 verplaatsen, dan moet er dus gelden dat

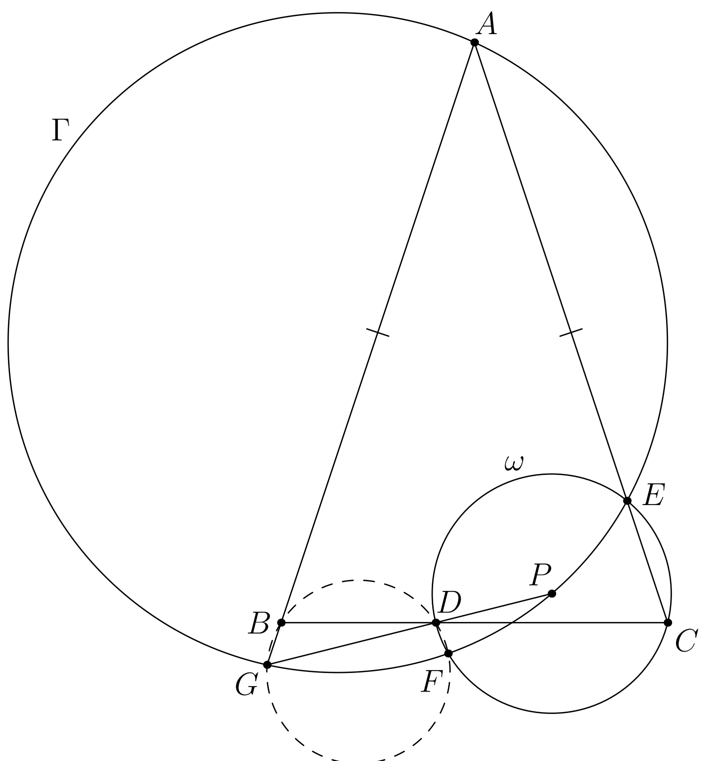
$$d_1 + \frac{d_{100}}{11} \geq \text{“nieuwe waarde van doos } d_1\text{”} \geq d_{100}.$$

Dit kunnen we herschrijven als $11d_1 \geq 10d_{100}$. Als we dit combineren met de eerste vergelijking vinden we

$$91d_{100} = 90d_{100} + d_{100} \leq 99d_1 + d_{100} \leq 1000.$$

Voor elke scholier is het laagste maximum van de sommen van de kaartjes per doos dus $d_{100} \leq \frac{1000}{91} = \frac{1001}{91} - \frac{1}{91} = 11 - \frac{1}{91}$. $\square$

Opgave 3. Zij $\triangle ABC$ een gelijkbenige driehoek met $|AB| = |AC|$. Gegeven is een punt P in $\triangle ABC$ ongelijk aan het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zij ω de cirkel door C met middelpunt P. Gegeven is dat de cirkel ω de lijnstukken BC en AC een tweede keer snijdt in respectievelijk D en E. Zij Γ de omgeschreven cirkel van $\triangle AEP$ en zij F het tweede snijpunt van ω en Γ. Bewijs dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle BDF$ op Γ ligt.



Oplossing I. Omdat $|FP| = |PE|$ zijn de hoeken op deze koorden van Γ ook gelijk: $\angle FAP = \angle PAE = \angle PAC$. Dan vinden we met behulp van koordenvierhoek $AEPF$ dat $\angle PFA = 180° - \angle PEA = \angle PEC$. Dus met hoekensom volgt

$$\begin{aligned}\angle APF &= 180° - \angle PFA - \angle FAP \\ &= 180° - \angle PEC - \angle PAC \\ &= 180° - \angle ECP - \angle PAC \\ &= \angle CPA.\end{aligned}$$

Aangezien we ook weten dat $|FP| = |PC|$ (en natuurlijk $|AP| = |AP|$) volgt uit (ZHZ) dat $\triangle AFP \simeq \triangle ACP$. Hieruit concluderen we dat $|AF| = |AC| = |AB|$. Dat betekent dat A het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van $\triangle BCF$. Het betekent ook dat $\triangle ABF$

gelijkbenig is en dus dat de middelloodlijn van BF gelijk is aan de bissectrice van $\angle BAF$. Aan de andere kant is $\triangle DPF$ ook gelijkbenig, dus de middelloodlijn van DF is gelijk aan de bissectrice van $\angle DPF$. Het snijpunt van de middellooddlijnen van BF en DF noemen we Q. Aangezien A en P de middelpunten zijn van de betreffende omgeschreven cirkels krijgen we met de middelpunt-omtrekshoekstelling dat

$$\angle QAF = \tfrac{1}{2}\angle BAF = \angle BCF = \angle DCF = \tfrac{1}{2}\angle DPF = \angle QPF.$$

Dus Q ligt op Γ. $\square$

Oplossing II. Zij G het snijpunt van DP en AB. Wegens de gelijkbenigheid en dat P het middelpunt is van ω geldt dat

$$\begin{aligned}\angle GAE &= \angle BAC \\ &= 180^\circ - 2\angle ACB \\ &= 180^\circ - 2\angle ECD \\ &= 180^\circ - \angle EPD \\ &= 180^\circ - \angle EPG.\end{aligned}$$

Dus G ligt op Γ. Daardoor geldt ook dat

$$\begin{aligned}\angle BGF &= \angle AGF \\ &= 180^\circ - \angle AEF \\ &= \angle FEC \\ &= \angle FDC \\ &= 180^\circ - \angle BDF,\end{aligned}$$

waaruit volgt dat $BDFG$ een koordenvierhoek is. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle BDF$ is dus ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle BDG$, dat we Q noemen. Nu vinden we dat $\frac{1}{2}\angle DQG = \angle DFG = 180^\circ - \angle DBG = \angle DBA$. Dus $\angle GDQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DQG) = 90^\circ - \angle DBA = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EPD = \angle PDE$. Aangezien G, D en P collineair zijn, zijn E, D en Q dat nu ook. We concluderen dat

$$\angle QGP = \angle QGD = \angle GDQ = \angle PDE = \angle DEP = \angle QEP,$$

dus Q ligt op Γ, omdat G, E en P daar ook op liggen. $\square$

Oplossing III. Nadat we in oplossing II gevonden hebben dat $BDFG$ een koordenvierhoek is en we Q hebben geïntroduceerd, kunnen we het ook afmaken met behulp van een willekeurig punt X op de boog FG waar D niet op ligt. Dan geldt dat

$$\angle GQF = 2\angle GXF = 2(180^\circ - \angle GDF) = 2\angle PDF = 180^\circ - \angle DPF = 180^\circ - \angle GPF$$

omdat $\triangle PDF$ gelijkbenig is. Hieruit volgt met de koordenvierhoekstelling dat $GPFQ$ een koordenvierhoek is. $\square$

Opgave 4. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ zodanig dat

$$f(x) + f(y) = \left(f(x+y) + \frac{1}{x+y}\right)\bigl(1 - xy + f(xy)\bigr)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Oplossing. Antwoord: de enige functie die voldoet is $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Deze functie voldoet inderdaad want

$$\begin{aligned}\left(f(x+y) + \frac{1}{x+y}\right)\bigl(1 - xy + f(xy)\bigr) &= \left((x+y) - \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y}\right)\bigl(1 - xy + xy - \frac{1}{xy}\bigr)\\ &= (x+y)(1 - \frac{1}{xy})\\ &= x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\\ &= f(x) + f(y).\end{aligned}$$

Als functie op $\mathbb{Q}^+$ is het vaak een goed idee om eerst te kijken wat er met de natuurlijke getallen gebeurt. Het idee is om producten xy uit te spelen tegen sommen $x + y$, zoals bijvoorbeeld $2 \cdot 2 = 2 + 2$.

Lemma. Er geldt dat $f(1) = 0$.

Bewijs. Als we $x = y = 1$ invullen krijgen we $2f(1) = \bigl(f(2) + \frac{1}{2}\bigr)\, f(1)$. Dit betekent dat $f(1) = 0$ of $f(2) = \frac{3}{2}$.

Stel dat $f(2) = \frac{3}{2}$. Als we nu $x = y = 2$ invullen krijgen we $2f(2) = \bigl(f(4) + \frac{1}{4}\bigr)\,(f(4) - 3)$. Dit werken we uit als $3 = f(4)^2 - \frac{11}{4}f(4) - \frac{3}{4}$. Na vermenigvuldigen met 4 zien we dat we dit kunnen ontbinden als $(f(4) + 1)(4f(4) - 15) = 0$. Dus $f(4) = -1$ of $f(4) = \frac{15}{4}$.

Als we $y = 1$ invullen in de oorspronkelijke vergelijking vinden we dat

$$f(x) + f(1) = \left(f(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(f(x) - x + 1)\,. \tag{1}$$

Als we hier $x = 2, 3, 4, 5$ invullen krijgen we respectievelijk

$$\frac{3}{2} + f(1) = \left(f(3) + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2},$$
$$f(3) + f(1) = \left(f(4) + \frac{1}{4}\right)(f(3) - 2),$$
$$f(4) + f(1) = \left(f(5) + \frac{1}{5}\right)(f(4) - 3),$$
$$f(5) + f(1) = \left(f(6) + \frac{1}{6}\right)(f(5) - 4).$$

In het geval dat $f(4) = \frac{15}{4}$ levert de tweede vergelijking dat $f(3) + f(1) = 4(f(3) - 2)$ dus $3f(3) = f(1) + 8$. De eerste vergelijking levert echter dat $3f(3) + 1 = 3 \cdot 2 \cdot (\frac{3}{2} + f(1)) = 6f(1) + 9$. We concluderen dat $f(1) + 8 = 3f(3) = 6f(1) + 9 - 1 = 6f(1) + 8$. Oftewel in dit geval geldt $f(1) = 0$ zoals we wilden bewijzen.

Stel aan de andere kant dat $f(4) = -1$. Zoals we net gezien hebben levert de eerste vergelijking dat $3f(3) - 6f(1) = 8$. De tweede vergelijking levert in dit geval dat $f(3) + f(1) = -\frac{3}{4}(f(3) - 2)$ dus $7f(3) + 4f(1) = 6$. Als we dit stelsel oplossen (bijv. door twee keer de eerste vergelijking op te tellen bij drie keer de tweede), dan vinden we dat $f(1) = -\frac{19}{27}$ en $f(3) = \frac{34}{27}$. Als we dit in de derde vergelijking invullen krijgen we $-1 - \frac{19}{27} = -4\left(f(5) + \frac{1}{5}\right)$, oftewel $f(5) = \frac{61}{270}$. Evenzo krijgen we dan uit de vierde vergelijking dat $\frac{61}{270} - \frac{19}{27} = \left(f(6) + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{61}{270} - 4\right)$, oftewel $f(6) = -\frac{245}{6114}$.

We hebben nu 6 uitgerekend als $4 + 1 + 1$, maar we kunnen het natuurlijk ook doen als $2 \cdot 3$. Als we $x = 2$ en $y = 3$ invullen, dan krijgen we

$$f(2) + f(3) = \left(f(5) + \frac{1}{5}\right)(f(6) - 5).$$

Als we hier de gevonden waarden van $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ en $f(6)$ invullen komt er echter geen gelijkheid uit, want de linkerkant is groter dan nul en de rechterkant kleiner dan nul. We concluderen dat het geval $f(4) = -1$ niet kan, en dat $f(1) = 0$. $\diamondsuit$

Nu zouden we graag vergelijking (1) gebruiken voor inductie, maar de basis met $x = 1$ werkt niet, omdat $f(1) = 0$. Als nieuwe basis willen we het geval $f(4) = \frac{15}{4}$ van hiervoor gebruiken, dat niet op een tegenspraak uitkwam maar juist op $f(1) = 0$.

Lemma. Er geldt dat $f(4) = \frac{15}{4}$.

Bewijs. We gebruiken eigenlijk hetzelfde trucje als hierboven om $f(4)$ uit te reken, maar nu met het feit dat we $f(1)$ weten in plaats van $f(2)$. Met $x = y = 2$ vinden we weer dat $2f(2) = \left(f(4) + \frac{1}{4}\right)(f(4) - 3)$. Door $x = 2$ in te vullen in (1) vinden we $f(2) =$

$\left(f(3)+\frac{1}{3}\right)(f(2)-1)$ en door $x=3$ in te vullen in (1) vinden we $f(3)=\left(f(4)+\frac{1}{4}\right)(f(3)-2)$. Dit stelsel van drie vergelijkingen kunnen we oplossen door de tweede vergelijking te herschrijven als

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{f(2)}{f(2)-1}-\tfrac{1}{3} \\ &= \frac{f(2)-1+1}{f(2)-1}-\tfrac{1}{3} \\ &= 1+\frac{1}{f(2)-1}-\tfrac{1}{3} \\ &= \frac{1}{f(2)-1}+\tfrac{2}{3}, \end{aligned}$$

oftewel $f(2)=\frac{1}{f(3)-\frac{2}{3}}+1$. Net zo volgt uit de derde vergelijking dat $f(4)=\frac{2}{f(3)-2}+\frac{3}{4}$ wat we kunnen herschrijven als $f(3)-\frac{2}{3}=\frac{\frac{4}{3}f(4)+1}{f(4)-\frac{3}{4}}$. Door alles te combineren, vinden we dat

$$\begin{aligned} \left(f(4)+\tfrac{1}{4}\right)(f(4)-3) &= 2f(2) \\ &= 2\left(\frac{1}{f(3)-\frac{2}{3}}+1\right) \\ &= 2\left(\frac{f(4)-\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}f(4)+1}+1\right) \\ &= \frac{2f(4)-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}f(4)+2}{\frac{4}{3}f(4)+1} \\ &= \frac{\frac{14}{3}f(4)+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}f(4)+1}. \end{aligned}$$

Als we dit uitwerken door met $12(\frac{4}{3}f(4)+1)$ te vermenigvuldigen krijgen we een derdegraads vergelijking. Met $t=f(4)$ is dat $16t^3-32t^2-101t-15=0$. Gelukkig hebben we al een vermoeden voor een nulpunt, namelijk $t=\frac{15}{4}$. We kunnen eenvoudig controleren dat dit inderdaad een nulpunt is en we factoriseren

$$0=16t^3-32t^2-101t-15=(4t-15)(4t^2+7t+1).$$

De discriminant van $4t^2+7t+1$ is $D=7^2-4\cdot 4=33$ wat geen kwadraat is van een rationaal getal. Dus $t=\frac{15}{4}$ is het enige rationale nulpunt van de derdegraads vergelijking en de enige mogelijkheid voor $f(4)$. $\diamondsuit$

Uit de drie vergelijkingen waar we het stelsel voor $f(4)$ mee begonnen, volgt nu direct dat $f(2)=\frac{3}{2}$ en $f(3)=\frac{8}{3}$. Al met al hebben we met $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ en $f(4)$ een inductiebasis voor $f(n)=n-\frac{1}{n}$ voor alle natuurlijke getallen n. Stel als inductiehypothese dat deze formule geldt voor n. Dan volgt uit (1) dat

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{f(n)+f(1)}{f(n)-n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n-\frac{1}{n}+0}{n-\frac{1}{n}-n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n^2-1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ &= (n+1) - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

wat de inductie voltooit. Als we nu $x = n$ en $y = \frac{1}{n}$ invullen, dan vinden we

$$f(n) + f(\tfrac{1}{n}) = \left(f(n+\tfrac{1}{n}) + \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \right) \big(1-1+0\big) = 0.$$

Hieruit volgt dat $f(\frac{1}{n}) = -f(n) = \frac{1}{n} - n$. Nu bewijzen we dat $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$ met inductie naar m. De inductiebasis met $m = 1$ hebben we net bewezen. Stel nu dus dat deze formule geldt voor een zekere m en alle n. Nu vullen we $x = \frac{m}{n}$ en $y = \frac{1}{n}$ waaruit we krijgen dat

$$\begin{aligned} f(\tfrac{m+1}{n}) &= \frac{f(\frac{m}{n})+f(\frac{1}{n})}{f(\frac{m}{n^2}) - \frac{m}{n^2} + 1} - \frac{n}{m+1} \\ &= \frac{\frac{m}{n} - \frac{n}{m} + \frac{1}{n} - n}{\frac{m}{n^2} - \frac{n^2}{m} - \frac{m}{n^2} + 1} - \frac{n}{m+1} \\ &= \frac{(m+1)(\frac{1}{n} - \frac{n}{m})}{n(\frac{1}{n} - \frac{n}{m})} - \frac{n}{m+1} \\ &= \frac{m+1}{n} - \frac{n}{m+1}. \end{aligned}$$

Hiermee is de inductie naar m voltooid, en daarmee ook het complete bewijs. $\square$