IMO-selectietoets II

donderdag 8 juni 2023

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij n een positief geheel getal. Bewijs dat de getallen

$$1^1, 3^3, 5^5, \ldots, (2^n - 1)^{2^n - 1}$$

in verschillende restklassen zitten modulo 2^n.

Oplossing I. We bewijzen het gevraagde met inductie. Voor $n = 1$ kijken we enkel naar het getal 1^1, dus is het gevraagde triviaal waar.

Stel nu als inductiehypothese dat $1^1, 3^3, 5^5, \ldots, (2^n - 1)^{2^n - 1}$ in verschillende restklassen zitten modulo 2^n. Ten eerste zitten deze getallen dan ook in verschillende restklassen modulo 2^{n+1}. Aangezien $\varphi(2^{n+1}) = 2^n$, geldt $a^k \equiv a^\ell \mod 2^{n+1}$ als $k \equiv \ell \mod 2^n$ en a oneven.

De getallen die er bij komen, schrijven we als $(2^n + m)^{2^n + m}$ met $1 \leq m \leq 2^n - 1$ en oneven. Als we de haakjes van $(2^n + m)^{2^n + m}$ gaan uitwerken met het binomium van Newton, dan merken we op dat elke term met minstens twee factoren 2^n congruent is aan 0 modulo 2^{n+1}. We vinden dus modulo 2^{n+1} dat

$$\begin{aligned}
(2^n + m)^{2^n + m} &\equiv m^{2^n + m} + (2^n + m)m^{2^n + m - 1}2^n + \binom{2^n + m}{2} m^{2^n + m - 2}(2^n)^2 + \ldots \\
&\equiv m^{2^n + m} + (2^n + m)m^{2^n + m - 1}2^n \\
&\equiv m^m + (2^{2n} + 2^n m)m^{m-1} \\
&\equiv m^m + 2^n \cdot m^m \\
&\equiv m^m + 2^n,
\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap hebben gebruikt dat m^m oneven is. Dit betekent immers dat we m^m kunnen schrijven als $2a + 1$ en dan vinden we dat $2^n(2a + 1) = 2^{n+1}a + 2^n \equiv 2^n \mod 2^{n+1}$.

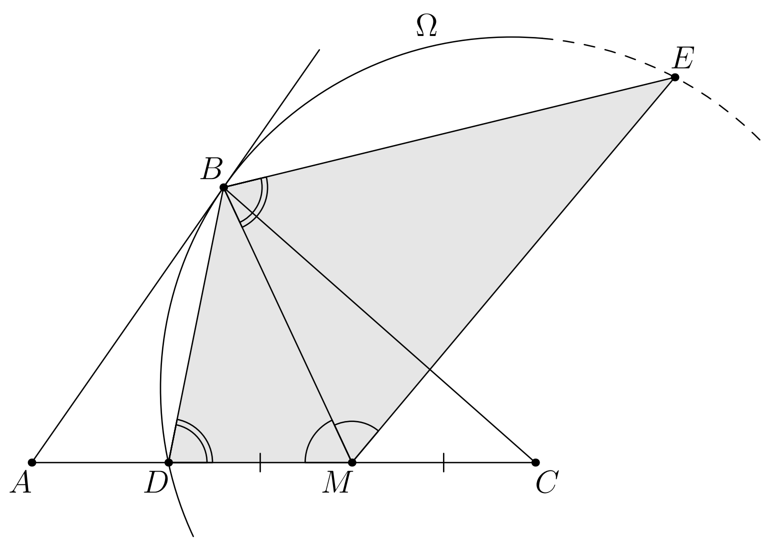
Aangezien de getallen m^m uit de eerste groep onderling verschillend zijn modulo 2^{n+1}, zijn de getallen uit de tweede groep nu ook onderling verschillend modulo 2^{n+1}. Uit deze berekening concluderen we bovendien dat de getallen van de eerste groep verschillend zijn van de getallen uit de tweede groep. Stel namelijk dat $(2^n + m)^{2^n+m} \equiv k^k \mod 2^{n+1}$ met $1 \leq k, m \leq 2^n - 1$, dan volgt uit deze berekening in het bijzonder dat $m^m \equiv m^m + 2^n \equiv k^k \mod 2^n$. Dus wegens de inductiehypothese weten we dat $m = k$. Maar in dat geval geldt juist dat $(2^n + m)^{2^n+m} \equiv m^m + 2^n \not\equiv m^m \mod 2^{n+1}$.

We concluderen dus dat geen enkel getal uit de groepen $1^1, 3^3, 5^5, \ldots, (2^n - 1)^{2^n-1}$ en $(2^n + 1)^{2^n+1}, (2^n + 3)^{2^n+3}, \ldots, (2^{n+1} - 1)^{2^{n+1}-1}$ dezelfde restklasse heeft als een ander getal uit deze twee groepen. Hiermee is de inductiestap afgerond, en met inductie volgt dus dat de stelling waar is voor alle natuurlijke getallen n. $\square$

Oplossing II. Om te laten zien dat de getallen in de tweede groep verschillend van elkaar zijn, kunnen we ook het volgende doen. Deze getallen zijn van de vorm $(2^{n+1} - k)^{2^{n+1}-k}$ met $1 \leq k \leq 2^n - 1$ en oneven. Aangezien $\varphi(2^{n+1}) = 2^n$, geldt $a^k \equiv a^l \mod 2^{n+1}$ als $k \equiv l \mod 2^n$. Dat betekent dat $(2^{n+1} - k)^{2^{n+1}-k} \equiv (-k)^{-k} \equiv -(k^k)^{-1} \mod 2^{n+1}$ waarbij we ook hebben gebruikt dat k oneven is. Aangezien de getallen k^k met $1 \leq k \leq 2^n - 1$ en oneven verschillend zijn, zijn de getallen $(2^{n+1} - k)^{2^{n+1}-k}$ dat dus ook. $\square$

Opgave 2. Gegeven is een driehoek ABC en een punt D op het lijnstuk AC. Zij M het midden van CD en zij Ω de cirkel door B en D die raakt aan AB. Zij E het punt zodat $\triangle MDB \sim \triangle MBE$ en zodat D en E aan weerszijden van de lijn MB liggen.

Toon aan dat E op Ω ligt dan en slechts dan als $\angle ABD = \angle MBC$.



Oplossing I. We bewijzen eerst dat $\triangle CMB \sim \triangle DBE$. Omdat D en E aan weerszijden van MB liggen, geldt er dat $\angle DBE = \angle DBM + \angle MBE = \angle DBM + \angle MDB = \angle CMB$ vanwege de gegeven gelijkvormigheid en de buitenhoekstelling. Ten tweede geldt er dat

$$\frac{|DB|}{|BE|} = \frac{|MD|}{|MB|} = \frac{|CM|}{|MB|}$$

vanwege de gegeven gelijkvormigheid en het feit dat M het midden is van CD. Met zhz volgt nu inderdaad dat $\triangle CMB \sim \triangle DBE$. In het bijzonder volgt hieruit dat $\angle BED = \angle MBC$. Er geldt dus dat $\angle ABD = \angle MBC$ dan en slechts dan als $\angle ABD = \angle BED$. Wegens de raaklijn-omtrekhoekstelling geldt dit dan en slechts dan als AB raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle BDE$. De cirkel door B en D die raakt aan AB is uniek, met als middelpunt het snijpunt van de middelloodlijn van BD en de lijn door B loodrecht op AB. Dus AB raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle BDE$ dan en slechts dan als E op Ω ligt.$\square$

Oplossing II. Zij F de spiegeling van B in M. Dan is $BCFD$ een parallellogram, dus $\angle MBC = \angle MFD = \angle BFD$. Verder volgt omdat M het midden is van CD en BF uit $\triangle MDB \sim \triangle MBE$ dat $\triangle CDB \sim \triangle FBE$, want gelijkvormigheden nemen punten mee.

(Om precies te zijn, wegens zhz met $\frac{|FB|}{|BE|} = 2\frac{|MB|}{|BE|} = 2\frac{|MD|}{|DB|} = \frac{|CD|}{|DB|}$ en $\angle FBE = \angle CDB$.) Er geldt dus dat $\angle BEF = \angle DBC = 180^\circ - \angle BDF$, waaruit met de koordenvierhoekstelling volgt dat $BDFE$ een koordenvierhoek is.

Er geldt nu dat E op Ω ligt dan en slechts dan als F op Ω ligt. Dat laatste geldt vanwege de raaklijn-omtrekhoekstelling dan en slechts dan als $\angle ABD = \angle BFD$ (net als in de eerste oplossing omdat de cirkel door BD rakend aan AB uniek is). Omdat $\angle MBC = \angle BFD$, geldt dit dan en slechts dan als $\angle ABD = \angle MBC$. $\square$

Oplossing III. Zij H het tweede snijpunt van CD met Ω. Dan geldt vanwege de raaklijn-omtrekhoekstelling dat $\angle ABD = \angle BHD$.

Als $\angle ABD = \angle MBC$, geldt er dus dat $\angle MBC = \angle BHD = \angle BHM$, waaruit met hh volgt dat $\triangle MBC \sim \triangle MHB$. Daaruit volgt dat

$$\frac{|MB|}{|MH|} = \frac{|MC|}{|MB|} = \frac{|MD|}{|MB|} = \frac{|MB|}{|ME|},$$

waarbij we ook gebruiken dat M het midden is van CD en dat $\triangle MDB \sim \triangle MBE$. We concluderen dat $|ME| = |MH|$. Met de buitenhoekstelling in $\triangle MEH$ volgt nu dat $\angle DHE = \angle MHE = \frac{1}{2}\angle DME = \angle DMB = 180^\circ - \angle MDB - \angle DBM = 180^\circ - \angle MBE - \angle DBM = 180^\circ - \angle DBE$, waaruit met de koordenvierhoekstelling volgt dat E op Ω ligt.

Als andersom E op Ω ligt, dan geldt dat $\angle MHE = \angle DHE = 180^\circ - \angle DBE = 180^\circ - \angle MBE - \angle DBM = 180^\circ - \angle MDB - \angle DBM = \angle DMB = \frac{1}{2}\angle DME$. Nu zijn $\angle MHE + \angle MEH = \angle DME$, dus ook $\angle MEH = \frac{1}{2}\angle DME$. Dus $|ME| = |MH|$ en vervolgens geldt dat

$$\frac{|MB|}{|MH|} = \frac{|MB|}{|ME|} = \frac{|MD|}{|MB|} = \frac{|MC|}{|MB|}.$$

Met zhz leiden we nu af dat $\triangle MBC \sim \triangle MHB$, waaruit volgt dat $\angle ABD = \angle BHD = \angle BHM = \angle MBC$, zoals gewenst. $\square$

Opgave 3. Vind de kleinst mogelijke waarde van

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z},$$

voor positieve reële getallen x, y en z.

Oplossing. Antwoord: de kleinst mogelijke waarde is $3\sqrt[3]{36}$.

Met de ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde vinden we

$$\begin{aligned} xy + \frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} &\geq 3\sqrt[3]{xy\frac{1}{3x}\frac{1}{2y}} = 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}, \\ yz + \frac{3}{2y} + \frac{3}{z} &\geq 3\sqrt[3]{yz\frac{3}{2y}\frac{3}{z}} = 3\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}}, \\ xz + \frac{2}{3x} + \frac{2}{z} &\geq 3\sqrt[3]{xz\frac{2}{3x}\frac{2}{z}} = 3\sqrt[3]{\tfrac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Wanneer we deze drie ongelijkheden optellen krijgen we

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z} \geq 3(\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}} + \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{4}{3}}) = 3(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})\sqrt[3]{36} = 3\sqrt[3]{36}.$$

Voor elke van de drie ongelijkheden geldt gelijkheid wanneer de drie termen gelijk zijn. We komen uit op een gelijkheidsgeval voor alledrie wanneer $(x, y, z) = (\frac{1}{3}\sqrt[3]{6}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$, wat ook gemakkelijk te controleren is. Dan is $xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z}$ namelijk gelijk aan

$$\tfrac{1}{6}\sqrt[3]{36} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{36} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{36} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{6}} + 4\frac{1}{\sqrt[3]{6}} + 5\frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{36} + 12\frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{36} = 3\sqrt[3]{36}.$$

$\square$

Opmerking. Nadat je hebt besloten om de ongelijkheid op te splitsen in drie ongelijkheden met het rekenkundig-meetkundig gemiddelde (één voor xy, één voor yz en één voor xz), zijn er verschillende manieren om de coëfficiënten te vinden voor $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ en $\frac{1}{z}$. Allereerst kun je je laten leiden door voorbeelden die je hebt gevonden in je zoektocht naar het gelijkheidsgeval. Zo wordt de uitdrukking gelijk aan 10 voor $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, 1, 2)$ en met $(x, y, z) = (\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{9}{5})$ krijg je $\frac{324}{100} + \frac{12}{18} \cdot 10 = 3{,}24 + 6{,}6666... = 9{,}9066....$

Een structurelere aanpak is het invoeren van variabelen a, b, c, d, e, f voor de ongelijkheden op $xy + a\frac{1}{x} + b\frac{1}{y}$, $yz + c\frac{1}{y} + d\frac{1}{z}$ en $zx + e\frac{1}{z} + f\frac{1}{x}$. Omdat deze drie termen op moeten tellen tot de gevraagde uitdrukkingen, krijgen we de voorwaarden

$$f + a = 1,$$
$$b + c = 2,$$
$$d + e = 5.$$

Verder willen we dat er gelijkheid geldt voor bepaalde x, y en z. Dus het stelsel

$$xy = a\frac{1}{x} = b\frac{1}{y},$$
$$yz = c\frac{1}{y} = d\frac{1}{z},$$
$$zx = e\frac{1}{z} = f\frac{1}{x}$$

moet een oplossing hebben voor een zekere x, y en z. Uit de eerste vergelijking volgt dan dat $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Maar met behulp van de laatste twee vergelijkingen kunnen we dat ook schrijven als

$$\frac{x}{y} = \frac{zx}{yz} = \frac{f/x}{c/y} = \frac{fy}{cx}.$$

Dat betekent dat $\frac{f}{c} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$, oftewel $a^2/f = b^2/c$. Evenzo geldt er dat $c^2/b = d^2/e$ en $e^2/d = f^2/a$. Samen met $f+a = 1$, $b+c = 2$ en $d+e = 5$ hebben we nu zes vergelijkingen in zes variabelen. Hoewel het nog niet eenvoudig is om dit stelsel op te lossen, versimpelt dat de zoektocht enorm doordat het nu makkelijk te controleren is of a, b, c, d, e, f voldoet. Andere vergelijkingen die je uit dit stelsel kan afleiden zijn bijvoorbeeld $ace = bdf$ en $ad = be = cf$.

Opgave 4. Zij $n \geq 3$ een vast natuurlijk getal. Er zijn n dozen $A_1, A_2, \dots, A_n$, elk met een aantal stenen erin $a_1, a_2, \dots, a_n$ zo dat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n$. Een zet bestaat uit de volgende handelingen:

> kies een doos en verdeel alle stenen in de doos over de n dozen (inclusief de gekozen doos) zo dat voor elke twee dozen het aantal toegevoegde stenen hoogstens 1 verschilt.

Voor een verdeling $a_1, a_2, \dots, a_n$ definiëren we $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ als het minste aantal benodigde zetten om alle stenen in één doos te krijgen. Zij M_n het maximum van $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ voor alle mogelijk verdelingen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zo dat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n$. Bepaal M_n en alle verdelingen $a_1, a_2, \dots, a_n$ waarvoor $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = M_n$.

Voorbeeld. Als $n = 4$ en de dozen bevatten 2, 6, 0, 4 stenen, dan kunnen we de 2 stenen uit doos A_1 uitdelen als 1,0,1,0. Na deze zet is het aantal stenen per doos 1, 6, 1, 4.

Oplossing. Antwoord: $M = 3n - 4$ en $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 3n - 4$ dan en slechts dan als $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 3$.

Allereerst merken we op dat er voor elke verdeling een zet bestaat zo dat $\max(a_1, \dots, a_n)$ minstens een omhoog gaat, tenzij alle stenen in één doos zitten. Inderdaad, kies een doos waar het maximum bereikt wordt, kies een andere niet-lege doos en verdeel de stenen van die doos zo dat minstens een steen in de eerste doos gaat. Hieruit volgt dat $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 3n - \max(a_1, \dots, a_n)$. In het bijzonder, als $\max(a_1, \dots, a_n) \geq 5$, dan geldt $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 3n - 5$. De rest van het bewijs volgt uit vier claims.

Claim 1. Als $\max(a_1, \dots, a_n) = 4$, dan geldt $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 3n - 5$.

Bewijs. Laat A_1 de doos zijn met de meeste stenen, en A_2 de doos met het op-een-na-hoogste aantal stenen. Dit betekent dat $a_1 = 4$ en $a_2 \geq \frac{3n-4}{n-1} = 3 - \frac{1}{n-1}$. Omdat a_2 geheel is en $n \geq 3$, betekent dat dus dat $a_2 \geq 3$. Elke andere doos met minstens 2 stenen verdelen we zo dat A_1 en A_2 allebei één steen krijgen. We herhalen dit totdat er geen dozen meer zijn met minstens 2 stenen, buiten A_1 en A_2. Voor deze verdeling $b_1, \dots, b_n$ geldt dus dat $b_3 + \cdots + b_n \leq n - 2$. Dat betekent dat $b_1 + b_2 \geq 3n - (n-2) = 2n + 2$ en omdat $b_1 - b_2 = a_1 - a_2 \leq 1$ vinden we dus dat $b_2 = \frac{1}{2}(b_2 + b_2) \geq \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - 1) \geq \frac{1}{2}(2n+1) = n + \frac{1}{2}$. Omdat b_2 geheel is, vinden we dus dat $b_2 \geq n + 1$. Nu kunnen we een zet doen waarbij we de stenen van A_2 verdelen, waarbij we A_1 2 stenen geven. Daarna maken we het af met zetten waarbij A_1 elke keer minstens een steen krijgt. Aangezien A_1 elke zet minstens een steen krijgt en een zet minstens twee, is het aantal gedane zetten hoogstens $3n - 5$. $\diamond$

Claim 2. Als $\max(a_1, \dots, a_n) = 3$, dan geldt $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 3n - 4$.

Bewijs. We doen een willekeurige zet en passen Claim 1 toe op het resultaat. Dan zijn we klaar in hooguit $1 + (3n - 5) = 3n - 4$ zetten. Alternatief, kunnen we een concrete serie van $3n - 4$ zetten geven. Als $\max(a_1, \ldots, a_n) = 3$ heeft elke doos precies 3 stenen. We beginnen met $n - 2$ zetten waarbij we A_i kiezen met $i \geq 3$ en de drie stenen verdelen over A_1, A_2 en A_i. Daarna hebben de eerste twee dozen beide $n + 1$ stenen, dus kunnen we een zet doen waarbij we de $n + 1$ stenen van de tweede doos verdelen zo dat de eerste doos er 2 krijgt. Aangezien A_1 elke zet minstens een steen krijgt en een zet minstens twee, is het aantal gedane zetten hoogstens $3n - 4$. $\diamondsuit$

Claim 3. Er zijn geen zetten zodat het maximum $\max(a_1, \ldots, a_n)$ met 3 of meer omhoog gaat.

Bewijs. Om een zet te doen waarbij een doos meer dan 3 stenen krijgt, zou de gekozen doos minstens $3n+1$ stenen moeten bevatten. Dit is in tegenspraak met het feit dat er maar $3n$ stenen zijn. Om een zet te doen waarbij een doos 3 stenen krijgt, moet de gekozen doos minstens $2n + 1$ stenen bevatten. Een doos die na deze zet het nieuwe maximum bereikt moet dus ook minstens $2n + 1$ stenen bevatten. Dit is wederom een tegenspraak. $\diamondsuit$

Claim 4. Als $\max(a_1, \ldots, a_n) = 3$, dan geldt $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq 3n - 4$.

Bewijs. Stel dat we alle stenen in $3n - 5$ of minder beurten in één doos kunnen krijgen. Wegens Claim 3 zijn er geen zetten waarbij het maximum 3 of meer omhoog gaat. Dat betekent dat er minstens twee zetten zijn waarbij het maximum 2 omhoog gaat. Zulke zetten noemen we *grote* zetten. Merk op dat elke doos minstens 1 steen krijgt bij een grote zet. Zij de eerste grote zet in beurt i en de laatste grote zet in beurt j. Aangezien een grote zet alleen uitgevoerd kan worden met een doos met minstens $n + 1$ stenen en elke doos begint met 3 stenen, geldt $i - 1 \geq (n + 1) - 3$ oftewel $i \geq n - 1$.

Zij m het aantal lege dozen aan het begin van zet j. Aangezien elke doos na zet i minstens 1 steen bevat, moeten we daarna minstens een zet gedaan hebben per lege doos. Dat betekent dat $(j - 1) - i \geq m$. Omdat elke doos weer minstens 1 steen krijgt, zijn er na zet j maximaal m dozen met 1 steen; de rest bevat er minstens 2. Omdat we na zet j geen grote zetten meer doen, kost het daarna dus nog minimaal $m + 2(n - 1 - m) = 2(n - 1) - m$ zetten om $n - 1$ dozen leeg te maken. Het totaal aantal zetten is dus minstens

$$i + (j - i) + 2(n - 1) - m \geq (n - 1) + (m + 1) + 2(n - 1) - m = 3n - 2,$$

wat in tegenspraak is met onze aanname dat we het in $3n - 5$ zetten konden. $\square$