IMO-selectietoets I

woensdag 7 juni 2023

Opgave 1. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $|AB| < |AC| < |BC|$, omgeschreven cirkel Γ met middelpunt O. Zij ω_1 de cirkel met middelpunt B en straal $|AC|$ en zij ω_2 de cirkel met middelpunt C en straal $|AB|$. De cirkels ω_1 en ω_2 snijden in een punt E zodanig dat A en E aan verschillende kanten liggen van de lijn BC. De cirkels Γ en ω_1 snijden in een punt F en de cirkels Γ en ω_2 snijden in een punt G, zodanig dat F en G aan dezelfde kant liggen van de lijn BC als E.

Bewijs dat de antipode K van A ten opzichte van Γ het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle EFG$.

De antipode K van een punt A is het unieke punt op de cirkel zo dat AK een diameter is.

Opgave 2. Bepaal het grootste reële getal M zodanig dat voor elke oneindige rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ van reële getallen die voldoet aan

a) $x_0 = 1$ en $x_1 = 3$,

b) $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} \geq 3x_n - x_{n+1}$,

geldt dat

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > M,$$

voor alle $n \geq 0$.

Opgave 3. Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor er n verschillende natuurlijke getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan, geen van alle groter dan n^2, zo dat de som

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Opgave 4. Gegeven een natuurlijk getal n definiëren we $\tau(n)$ als het aantal natuurlijke getallen dat n deelt, en definiëren we $\sigma(n)$ als de som van deze delers. Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat

$$\sigma(n) = \tau(n) \cdot \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil.$$

Voor een reëel getal x bedoelen we met de notatie $\lceil x \rceil$ het kleinste gehele getal groter of gelijk aan x.