Selectietoets

vrijdag 17 maart 2023

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. Ruben maakt een toets met n vragen. Elke vraag op deze toets is een ander aantal punten waard. De eerste vraag is 1 punt waard, de tweede vraag 2, de derde 3 en zo door tot en met de laatste vraag die n punten waard is. Elke vraag is goed of fout. Voor een vraag krijgt hij dus óf geen, óf alle punten. Zij $f(n)$ het aantal manieren waarop hij de toets kan maken zodat het aantal punten dat hij gehaald heeft gelijk is aan het aantal vragen dat hij fout had.

Onderzoek of er oneindig veel paren (a, b) bestaan met $a < b$ en $f(a) = f(b)$.

Oplossing I. Ten overvloede merken we op dat $f(1) = 0$, $f(2) = f(3) = f(4) = 1$, $f(5) = f(6) = 2$, $f(7) = f(8) = 3$, $f(9) = f(10) = 5$. Vanaf dat moment is $f(n)$ strikt stijgend als functie van n. Er zijn dus slechts een eindig aantal van de gezochte paren.

Zij S_n een verzameling van goede antwoorden, gezien als deelverzameling van $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dan is S_n een oplossing van de voorwaarde als de som van alle elementen van S_n plus het aantal elementen van S_n gelijk is aan n. We claimen eerst dat $f(n)$ in elk geval niet-dalend is. Inderdaad, als de deelverzameling S_{n-1} van $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ voldoet voor $n-1$ en we verhogen het grootste element van S_{n-1} met 1, dan krijgen we een verzameling S_n met evenveel elementen als S_{n-1} en met som 1 hoger dan de som van S_{n-1}. Dus dit geeft een oplossing voor n. Dit is een injectieve afbeelding van de verzameling van oplossingen voor $n-1$ naar de verzameling van oplossingen voor n.

We laten nu zien dat er voor $n \geq 11$ nog minstens één andere oplossing is die niet in het beeld van deze afbeelding ligt. Een verzameling van minstens twee goede antwoorden waarvan het grootste en het een-na-grootste element precies 1 van elkaar verschillen ligt in ieder geval niet in het beeld. Bij een verzameling die wel in het beeld ligt, is namelijk bij het grootste goede antwoord 1 opgeteld. Als $n = 2k+1$ met $k \geq 5$, dan is de verzameling goede antwoorden $S = \{1, k-2, k-1\}$ een oplossing, omdat $1+(k-2)+(k-1)+|S| = 2k+1 = n$. Als $n = 2k$ met $k \geq 6$, dan is op dezelfde manier $S = \{2, k-3, k-2\}$ een oplossing, omdat $2+(k-3)+(k-2)+|S| = 2k = n$. We concluderen dat $f(n) > f(n-1)$ voor alle $n \geq 11$. $\square$

Oplossing II. Als $n = 2k+1$ met $k \geq 2$ oneven is, dan is de verzameling goede antwoorden $S = \{k-1, k\}$ ook een oplossing, omdat immers $(k-1) + k + |S| = 2k + 1 = n$. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$f(a-b)f(c-d) + f(a-d)f(b-c) \leq (a-c)f(b-d)$$

voor alle reële getallen a, b, c en d.

N.B. rechts van het ongelijkheidsteken staat dus maar één f.

Oplossing. De oplossingen zijn $f(x) = 0$ voor alle x en $f(x) = x$ voor alle x. Voor $f(x) = 0$ vinden we eenvoudig dat altijd gelijkheid geldt. Voor $f(x) = x$ controleren we dat

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) &= ac - ad - bc + bd + ab - ac - bd + cd \\ &= -ad - bc + ab + cd \\ &= (a-c)(b-d),\end{aligned}$$

dus ook in dat geval geldt gelijkheid. Nu laten we zien dat dit de enige twee oplossingen zijn.

Invullen van $a = b = c = d = 0$ geeft ons dat $2f(0)^2 \leq 0$, wat betekent dat $f(0) = 0$.

Vervolgens vullen we in $b = a - x$, $c = a$ en $d = a - y$, zodat $a - b = x$, $a - c = 0$ en $a - d = y$. Dan vinden we dat

$$f(y)\big(f(x) + f(-x)\big) \leq 0 \tag{1}$$

Stel dat er een y is zo dat $f(y) \neq 0$. Als we dan in de vergelijking hierboven $x = y$ invullen en een van de termen naar rechts halen, vinden we dat

$$0 < f(y)^2 \leq -f(y)f(-y).$$

Dit betekent dat één van de twee waardes $f(y)$ en $f(-y)$ positief is en de ander negatief. Stel zonder verlies van algemeenheid dat $f(y)$ positief is.

Gegeven willekeurige a en y, vul nu $b = a$, $c = 0$ en $d = a - y$ in. Dan vinden we dat $f(y)f(a) \leq af(y)$. Als we door $f(y)$ delen, krijgen we dus $f(a) \leq a$. Als we echter $b = a$, $c = 0$ en $d = a + y$ hadden ingevuld, dan hadden we gevonden dat $f(-y)f(a) \leq af(-y)$. Aangezien $f(-y)$ negatief is, klapt het teken om wanneer we delen door $f(-y)$ zodat we ook vinden dat $f(a) \geq a$. We concluderen dat $f(a) = a$ voor alle reële a.

Dus f is de nulfunctie of $f(a) = a$ voor alle reële a, die we allebei aan het begin hebben gecontroleerd. $\square$

Opmerking. Door het argument van de laatste alinea toe te passen op vergelijking (1) kunnen we als tussenstap ook vinden dat $f(x) = -f(-x)$ voor alle x.

Opgave 3. We spelen een spelletje stoelendans met n stoelen genummerd 1 tot en met n. Je hangt n blaadjes, genummerd 1 tot en met n, op de stoelen zodanig dat het nummer op een blaadje niet overeenkomt met het nummer op de stoel.

Op elke stoel zit een speler. Wanneer je klapt, kijkt elke speler naar het nummer op het blaadje aan zijn huidige stoel en gaat op de stoel zitten met dat nummer. Bewijs dat het voor elke m die geen priem-macht is met $1 < m \leq n$ mogelijk is om de blaadjes zo op te hangen dat na m klappen voor het eerst iedereen weer op hun eigen stoel zit.

Oplossing I. Als $m = n$, dan kan je op stoel i het blaadje ophangen met nummer $i+1$. Iedereen schuift dan elke klap een stoel op en de eerste keer dat iemand weer op zijn eigen stoel zit is na n klappen. En dan zit ook iedereen weer op zijn eigen stoel. Stel nu dat $m < n$.

Aangezien m geen priemmacht is kunnen we m schrijven als $m = k\ell$ met $\text{ggd}(k, \ell) = 1$. We claimen dat er $a, b > 0$ zijn zo dat

$$ak + b\ell = n.$$

De getallen $n - ak$ met $a \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ zijn allemaal verschillend modulo ℓ. Zou dat immers niet het geval zijn, dan zouden er a_1 en a_2 zijn zo dat $n - a_1k \equiv n - a_2k \mod \ell$, oftewel $(a_1 - a_2)k \equiv 0 \mod \ell$. Aangezien $\text{ggd}(k, \ell) = 1$ zou dat betekenen dat $\ell \mid (a_1 - a_2)$, wat niet kan aangezien dit twee elementen zijn uit $\{1, 2, \ldots, \ell\}$. Dus de getallen $n - ak$ met $a \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ zijn inderdaad allemaal verschillend modulo ℓ. Daardoor zijn dit alle ℓ verschillende restklassen. Aangezien $n - ak \geq n - \ell k = n - m > 0$, zijn deze ℓ getallen ook allemaal groter dan 0. Kies nu de a waarvoor geldt dat $n - ak$ congruent is aan 0 modulo ℓ. Omdat $n - ak$ groter is dan 0, is er nu een $b > 0$ zodanig dat $n - ak = b\ell$. Dit geeft de $a, b > 0$ zo dat $ak + b\ell = n$.

Nu delen we de stoelen op in a groepjes van k stoelen en b groepjes van ℓ stoelen. In elk groepje hangen we de kaartjes op zo dat ze cyclisch doorschuiven. De spelers op een stoel in een groepje met k stoelen, zitten op hun eigen stoel elke k klappen (en anders niet). De spelers op een stoel in een groepje met ℓ stoelen, zitten op hun eigen stoel elke ℓ klappen (en anders niet). De eerste keer dat iedereen op hun eigen stoel zit, is dus na $\text{kgv}(k, \ell)$ klappen. Maar

$$\text{kgv}(k, \ell) = k\ell = m,$$

omdat $\text{ggd}(k, \ell) = 1$. $\square$

Oplossing II. We geven een alternatief bewijs voor het feit dat er $a, b > 0$ zijn zo dat $ak + b\ell = n$ wanneer $n > m$. Wegens Bézout zijn er gehele a_0 en b_0 zodanig dat $a_0k + b_0\ell =$

$\text{ggd}(k, \ell) = 1$. Als we dit vermenigvuldigen met n, krijgen we $na_0k + nb_0\ell = n$. Dit kunnen we herschrijven als

$$(na_0 + \lambda\ell)k + (nb_0 - \lambda k)\ell = n,$$

voor alle gehele λ. We zoeken dus een λ zo dat $a = na_0 + \lambda\ell > 0$ en $b = nb_0 - \lambda k > 0$.

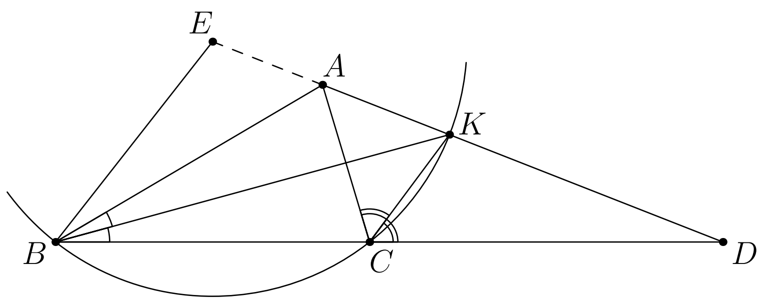
We weten dat $n > m = k\ell$, dus

$$\frac{nb_0}{k} - \frac{-na_0}{\ell} = \frac{nb_0\ell + na_0k}{k\ell} = \frac{n(b_0\ell + a_0k)}{k\ell} = \frac{n}{k\ell} > 1.$$

Dat betekent dat de afstand tussen de twee breuken $\frac{nb_0}{k}$ en $\frac{-na_0}{\ell}$ groter is dan 1, en dat er dus een geheel getal λ is zodat $\frac{nb_0}{k} > \lambda > \frac{-na_0}{\ell}$. Hieruit volgt precies dat $a = na_0 + \lambda\ell > 0$ en $b = nb_0 - \lambda k > 0$. $\square$

Opgave 4. In een driehoek $\triangle ABC$ met $\angle ABC < \angle BCA$ definiëren we K als het middelpunt van de aangeschreven cirkel aan AC. De lijnen AK en BC snijden in een punt D. Laat E het middelpunt zijn van de omgeschreven cirkel van $\triangle BKC$. Bewijs dat

$$\frac{1}{|KA|} = \frac{1}{|KD|} + \frac{1}{|KE|}.$$



Oplossing. We gebruiken de notatie $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ en $\angle BCA = 2\gamma$. Merk op dat $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

We bewijzen eerst dat K, A en E collineair zijn. Omdat K op de binnenbissectrice van $\angle ABC$ en de buitenbissectrice van hoek $\angle CAB$ ligt vinden we dat $\angle BKA = 180° - \angle KAB - \angle ABK = 180° - (90° + \alpha) - \beta = 90° - \alpha - \beta = \gamma$. Aan de andere kant weten we dat $\angle BCK = 90° + \gamma > 90°$ stomp is. Aangezien E het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van $\triangle BKC$, ligt E dus aan de andere kant van BK dan C, en met de middelpunt omtrekshoek weten we dat $\angle KEB = 2 \cdot (180° - \angle BCK) = 2 \cdot (90° - \gamma) = 180° - 2\gamma$. Omdat E het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van $\triangle BKC$ weten we echter ook dat $\triangle BEK$ gelijkbenig is met tophoek E. Dus $\angle BKE = \frac{1}{2}(180° - \angle KEB) = \frac{1}{2} \cdot 2\gamma = \gamma$. We concluderen dat $\angle BKA = \gamma = \angle BKE$, waaruit volgt dat K, A en E op één lijn liggen.

Wegens deze collineariteit vinden we dat $\angle AEB = \angle KEB = 180° - 2\gamma = 180° - \angle BCA$, dus $ACBE$ is een koordenvierhoek. In het bijzonder geldt dus dat $\angle AEC = \angle ABC = \angle ABD$. Omdat ook $\angle CAE = 90° + \alpha = \angle KAB = \angle DAB$, vinden we met (hh) dat $\triangle AEC \sim \triangle ABD$.

De laatste twee observaties die we nodig hebben, zijn dat $|EC| = |EK|$ omdat ook $\triangle CEK$ gelijkbenig is met tophoek E, en dat BK een bissectrice is van $\triangle ABD$. Nu volgt alles bij elkaar dat

$$1 - \frac{|KA|}{|KE|} = \frac{|KE| - |KA|}{|KE|} = \frac{|AE|}{|KE|} = \frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|DB|} = \frac{|AK|}{|DK|},$$

waarbij we respectievelijk het volgende hebben gebruikt: het verschil van breuken, dat K, A en E collineair zijn, dat $|EC| = |EK|$, dat $\triangle AEC \sim \triangle ABD$, en de bissectricestelling op BK in $\triangle ABD$. Het gevraagde volgt nu eenvoudig door $\frac{|KA|}{|KE|}$ naar de ander kant te halen en te delen door $|KA|$. $\square$

Opgave 5. Vind alle paren priemgetallen (p, q) waarvoor geldt dat

$$2^p = 2^{q-2} + q!.$$

Oplossing. Antwoord: de enige paren (p, q) die voldoen zijn $(3, 3)$ en $(7, 5)$.

Als eerste gaan we een paar kleine gevallen af. Als $q = 2$, dan heeft $2^p = 1 + 2$ geen oplossing. Als $q = 3$, dan geeft $2^p = 2 + 6$ dat $p = 3$ de enige oplossing is. Als $q = 5$, dan geeft $2^p = 8 + 120$ dat $p = 7$ de enige oplossing op. Hierna mogen we dus aannemen dat q minstens 7 is.

Nu merken we op dat we de voorwaarde kunnen herschrijven als

$$q! = 2^p - 2^{q-2} = 2^{q-2}(2^{p-q+2} - 1). \tag{2}$$

Omdat $q!$ positief is, is de rechterkant dat ook. In het bijzonder geldt dat $2^{p-q+2} > 1$, dus $p - q + 2 > 0$ en 2^{p-q+2} is geheel (en groter dan 1). We concluderen dat $2^{p-q+2} - 1$ geheel en oneven is. Dus de rechterkant heeft precies $q - 2$ factoren 2. Om het aantal factoren aan de linkerkant te tellen zij $\nu_2(a)$ de functie die telt hoeveel factoren een geheel getal a heeft. Omdat q een priemgetal groter dan 2, is het oneven. Dan geldt dat $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor = \frac{q-1}{2}$ en in het algemeen $\left\lfloor \frac{q}{2^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q-1}{2^i} \right\rfloor$. Zij n nu het gehele getal zo dat $2^n < q < 2^{n+1}$. Dan berekenen we dat

$$\begin{aligned}
\nu_2(q!) &= \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{q}{2^n} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q-1}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{q-1}{2^n} \right\rfloor \\
&\leq (q-1)(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2^n}) \\
&= (q-1)(1 - \tfrac{1}{2^n}) \\
&= (q-1) - \frac{q-1}{2^n} \\
&\leq q - 2.
\end{aligned}$$

In beide ongelijkheden hierboven geldt gelijkheid dan en slechts dan als $q = 2^n + 1$ (en we hebben in de tweede regel dus gebruikt dat q oneven is). Wegens de voorwaarde moet er ook gelijkheid gelden, dus $q = 2^n + 1$ voor een zeker natuurlijk getal n.

Nu we een heel eind zijn gekomen door naar factoren 2 te kijken, willen we graag een tegenspraak afleiden uit vergelijking (2) met modulo rekenen aangezien $q!$ veel priemfactoren heeft. Uit onze kleine voorbeelden weten we dat dit niet gaat lukken modulo 3 of 5, dus proberen het eerstvolgende priemgetal: 7.

Aangezien we hebben aangenomen dat q minstens 7 is, is $q!$ inderdaad deelbaar door 7. Dat betekent dat $2^{p-q+2} \equiv 1 \mod 7$. Aangezien ook $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \mod 7$, betekent dit dat $2^{\mathrm{ggd}(p-q+2,3)} \equiv 1 \mod 7$. Maar $2^1 \not\equiv 1 \mod 7$, dus $\mathrm{ggd}(p-q+2,3) = 3$ oftewel $p-q+2 \equiv 0 \mod 3$. We weten echter dat $q = 2^n + 1$ congruent is aan -1 of 0 modulo 3. Omdat we ook weten dat q priem is (en groter dan 3), vervalt het tweede geval en concluderen we dat $q \equiv -1 \mod 3$. Maar dan geeft het voorgaande dat $p \equiv q - 2 \equiv -1 - 2 \equiv 0 \mod 3$. Aangezien p ook priem is, concluderen we dat $p = 3$. Maar $2^{q-2} + q! = 2^3 = 8$ heeft geen oplossingen voor $q \geq 7$.

We concluderen dat de enige paren (p, q) die voldoen $(3, 3)$ en $(7, 5)$ zijn. $\square$

Opmerking. In het algemeen, als een willekeurig natuurlijk getal q in binaire schrijfwijze r cijfers 1 heeft, dan geldt dat

$$\nu_2(q!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{q}{2^i} \right\rfloor = q - r.$$

Dus voor $2^n < q < 2^{n+1}$ geldt wegens $r \geq 2$ dat $\nu_2(q!) \leq q - 2$ met gelijkheid dan en slechts dan als $r = 2$. Als q bovendien oneven is, moet wel $q = 2^n + 1$ (want $q = 2^n + 2^k$ met $k \geq 1$ is even).