IMO-selectietoets III

vrijdag 10 juni 2022

Opgave 1. Vind alle viertallen (a, b, c, d) van niet-negatieve gehele getallen zodat $ab = 2(1 + cd)$ en er een niet-ontaarde driehoek bestaat met zijden van lengte $a - c$, $b - d$ en $c + d$.

Opgave 2. Zij $n > 1$ een geheel getal. Op een rij staan n dozen, en we hebben $n + 1$ identieke stenen. Een verdeling is een manier om de stenen over de dozen te verdelen, waarbij elke steen in precies één doos zit. We zeggen dat twee van zulke verdelingen zich op een steenworp afstand van elkaar bevinden als we de ene verdeling uit de andere kunnen verkrijgen door precies één steen te verplaatsen naar een andere doos. De gezelligheid van een verdeling a is gedefinieerd als het aantal verdelingen dat zich op een steenworp afstand van a bevindt. Bepaal de gemiddelde gezelligheid over alle mogelijke verdelingen.

(Twee verdelingen zijn hetzelfde als er in de i-de doos van beide rijen evenveel stenen zitten, voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

Opgave 3. Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor er een geheel getal $a > 2$ bestaat zo dat $a^d + 2^d \mid a^n - 2^n$ voor alle positieve delers $d \neq n$ van n.

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met een rechte hoek in C en $|AC| > |BC|$, zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel en zij H de projectie van C op het lijnstuk AB. De ingeschreven cirkel ω van $\triangle ABC$ raakt de zijden BC, CA en AB in respectievelijk de punten A_1, B_1 en C_1. Laat E en F de reflectie zijn van C in respectievelijk de lijnen A_1C_1 en B_1C_1, en laat K en L de reflectie zijn van H in respectievelijk de lijnen A_1C_1 en B_1C_1. Bewijs de de omgeschreven cirkels van A_1EI, B_1FI en C_1KL door een gemeenschappelijk punt gaan.