



IMO-selectietoets II

donderdag 9 juni 2022

Opgave 1. In een scherphoekige driehoek ABC geldt $|AB| > |CA| > |BC|$. De punten D , E en F zijn de voetpunten van de hoogtelijnen vanuit respectievelijk A , B en C . De lijn door F evenwijdig aan DE snijdt BC in M . De bissectrice van $\angle MFE$ snijdt DE in N . Bewijs dat F het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle DMN$ is dan en slechts dan als B het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle FMN$ is.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. Voor een reëel getal $x \geq 1$ geldt dat $\lfloor x^{n+1} \rfloor$, $\lfloor x^{n+2} \rfloor$, \dots , $\lfloor x^{4n} \rfloor$ allemaal kwadraten van positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat $\lfloor x \rfloor$ ook het kwadraat van een positief geheel getal is.

Met $\lfloor z \rfloor$ bedoelen we het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z .

Opgave 3. Aan het plafond van een kamer hangen 15 lampen, genummerd van 1 tot en met 15. In het begin zijn de lampen allemaal uit. In een andere kamer zijn 15 schakelaars: een schakelaar voor lamp 1 en 2, een schakelaar voor lamp 2 en 3, een schakelaar voor lamp 3 en 4, enzovoorts, tot en met een schakelaar voor lamp 15 en 1. Als de schakelaar voor zo'n tweetal lampen wordt omgezet, verandert elk van die twee lampen van status (van aan naar uit of andersom). De schakelaars hangen in een willekeurige volgorde en zien er allemaal identiek uit. Raymond wil uitzoeken welke schakelaar bij welk tweetal lampen hoort. Vanuit de kamer met de schakelaars kan hij de lampen niet zien. Hij kan wel een aantal schakelaars omzetten en vervolgens naar de andere kamer lopen om te kijken welke lampen er aan staan. Dit kan hij meerdere keren doen. Hoe vaak moet hij minimaal naar de andere kamer lopen om van elke schakelaar zeker te weten bij welk tweetal lampen die hoort?

Opgave 4. Bepaal alle positieve gehele getallen d waarvoor er een $k \geq 3$ bestaat zodat je de getallen $d, 2d, 3d, \dots, kd$ op een rij kan zetten op zo'n manier dat voor elk tweetal buurgetallen geldt dat de som van die twee getallen een kwadraat is.