IMO-selectietoets I

woensdag 8 juni 2022

Uitwerkingen

Opgave 1. Bepaal alle positieve gehele getallen $n \geq 2$ waarvoor er een positieve deler $m \mid n$ bestaat met

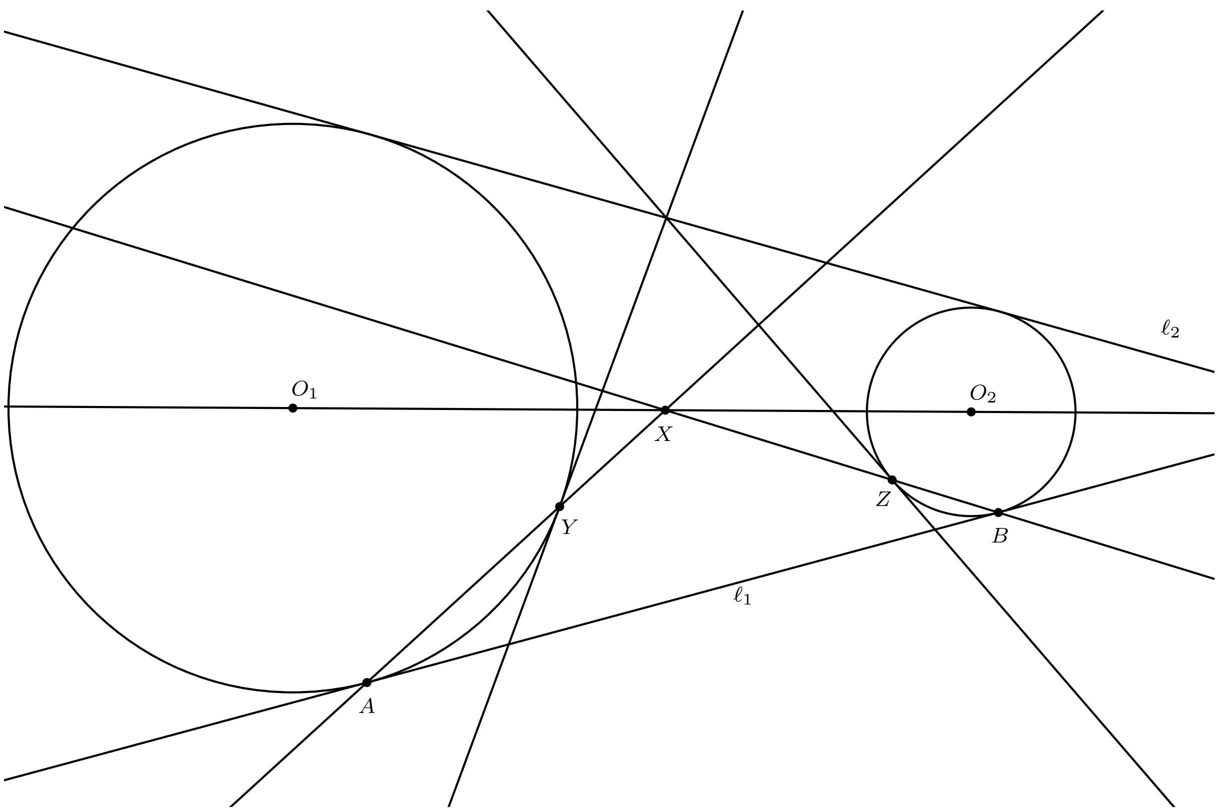
$$n = d^3 + m^3,$$

waarbij d de kleinste deler van n groter dan 1 is.

Oplossing. De kleinste deler van n groter dan 1 is het kleinste priemgetal dat een deler is dan n, dus d is priem. Verder geldt dat $d \mid n$, dus $d \mid d^3 + m^3$, dus $d \mid m^3$. Hieruit volgt dat $m > 1$. Anderzijds is $m \mid n$, dus $m \mid d^3 + m^3$, dus $m \mid d^3$. Omdat d priem is en $m > 1$, zien we nu dat m gelijk is aan d, d^2 of d^3.

In alle gevallen is de pariteit van m^3 hetzelfde als die van d^3, dus $n = d^3 + m^3$ is even. Dat betekent dat de kleinste deler van n groter dan 1 gelijk is aan 2, dus $d = 2$. We vinden nu als mogelijke oplossingen in geval $m = d$ het getal $n = 2^3 + 2^3 = 16$, in geval $m = d^2$ het getal $n = 2^3 + 2^6 = 72$, en in geval $m = d^3$ het getal $n = 2^3 + 2^9 = 520$. Deze voldoen daadwerkelijk: ze zijn even zodat inderdaad $d = 2$, en $2 \mid 16$; $4 \mid 72$ en $8 \mid 520$, zodat inderdaad $m \mid n$. $\square$

Opgave 2. Gegeven zijn twee cirkels Γ_1 en Γ_2 met middelpunten O_1 en O_2 en gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen ℓ_1 en ℓ_2. De lijn ℓ_1 raakt Γ_1 in A en Γ_2 in B. Zij X een punt op het lijnstuk O_1O_2, maar niet op Γ_1 of Γ_2. Het lijnstuk AX snijdt Γ_1 in $Y \neq A$ en het lijnstuk BX snijdt Γ_2 in $Z \neq B$.
Bewijs dat de raaklijn in Y aan Γ_1 en de raaklijn in Z aan Γ_2 elkaar snijden op ℓ_2.



Oplossing. We bekijken de configuratie waarbij Y tussen A en X ligt; andere configuraties gaan analoog. Zij C het raakpunt van ℓ_2 aan Γ_1. Dan is C de spiegeling van A in O_1O_2. Er geldt

$$\begin{aligned}
\angle O_1YX &= 180^\circ - \angle O_1YA && \text{(gestrekte hoek)}\\
&= 180^\circ - \angle YAO_1 && \text{(gelijkbenige driehoek } O_1YA\text{)}\\
&= 180^\circ - \angle XAO_1 &&\\
&= 180^\circ - \angle XCO_1 && (A \text{ en } C \text{ elkaars gespiegelde in } O_1X)
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat O_1CXY een koordenvierhoek is.

Noem nu S het snijpunt van de raaklijn aan Γ_1 in Y en ℓ_2. Dan raakt zowel SC als SY aan Γ_1, dus geldt $\angle SCO_1 = 90^\circ = \angle SYO_1$, dus O_1CSY is een koordenvierhoek.

We zien dat zowel X als S op de cirkel door O_1, C en Y ligt. Er geldt dus $\angle SXO_1 = \angle SYO_1 = 90°$. We concluderen dat SX loodrecht op O_1O_2 staat. Analoog kunnen we nu voor het snijpunt S' van de raaklijn aan Γ_2 in Z en ℓ_2 afleiden dat $S'X$ loodrecht op O_1O_2 staat. Aangezien S en S' ook beide op ℓ_2 liggen, geldt $S = S'$. Dus de twee raaklijnen snijden elkaar op ℓ_2. $\square$

Opgave 3. Voor reële getallen x en y definiëren we $M(x, y)$ als het maximum van de drie getallen xy, $(x-1)(y-1)$ en $x+y-2xy$. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van $M(x, y)$ over alle reële getallen x en y met $0 \leq x, y \leq 1$.

Oplossing I. We laten zien dat de minimale waarde $\frac{4}{9}$ is. Deze waarde kan bereikt worden door $x = y = \frac{2}{3}$ te nemen. Dan geldt $xy = \frac{4}{9}$, $(x-1)(y-1) = \frac{1}{9}$ en $x + y - 2xy = \frac{4}{9}$, dus dan is het maximum inderdaad $\frac{4}{9}$.

Nu gaan we bewijzen dat $M(x, y) \geq \frac{4}{9}$ voor alle x en y. Schrijf $a = xy$, $b = (x-1)(y-1)$ en $c = x+y-2xy$. Als we x en y vervangen door $1-x$ en $1-y$, dan worden a en b verwisseld en blijft c gelijk, omdat $(1-x)+(1-y)-2(1-x)(1-y) = 2-x-y-2+2x+2y-2xy = x+y-2xy$. Dus $M(1-x, 1-y) = M(x, y)$. Er geldt $x + y = 2 - (1 - x) - (1 - y)$, dus minstens één van $x + y$ en $(1 - x) + (1 - y)$ is groter of gelijk aan 1, wat betekent dat we zonder verlies van algemeemheid mogen aannemen dat $x + y \geq 1$.

Schrijf nu $x + y = 1 + t$ met $t \geq 0$. Er geldt ook $t \leq 1$, want $x, y \leq 1$ dus $x + y \leq 2$. Uit de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde volgt

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(1+t)^2}{4} = \frac{t^2+2t+1}{4}.$$

Er geldt $b = xy - x - y + 1 = xy - (1 + t) + 1 = xy - t = a - t$, dus $b \leq a$. Verder is

$$c = x + y - 2xy \geq (1 + t) - 2 \cdot \frac{t^2+2t+1}{4} = \frac{2+2t}{2} - \frac{t^2+2t+1}{2} = \frac{1-t^2}{2}.$$

Als nu $t \leq \frac{1}{3}$, dan geldt $c \geq \frac{1-t^2}{2} \geq \frac{1-\frac{1}{9}}{2} = \frac{4}{9}$ en dus ook $M(x, y) \geq \frac{4}{9}$.

Blijft over het geval $t > \frac{1}{3}$. Er geldt $c = x + y - 2xy = 1 + t - 2a > \frac{4}{3} - 2a$. Er geldt $M(x, y) \geq \max(a, \frac{4}{3} - 2a)$, dus

$$3M(x, y) \geq a + a + (\tfrac{4}{3} - 2a) = \tfrac{4}{3},$$

waaruit volgt dat $M(x, y) \geq \frac{4}{9}$.

We concluderen dat de minimale waarde van $M(x, y)$ gelijk is aan $\frac{4}{9}$. □

Oplossing II. We laten zien dat de minimale waarde $\frac{4}{9}$ is. Net als in de eerste oplossing zien we dat deze waarde bereikt kan worden door $x = y = \frac{2}{3}$ te nemen. Nu gaan we bewijzen dat $M(x, y) \geq \frac{4}{9}$ voor alle x en y. Dit doen we in feite door de niveaukrommen te vergelijken waarop de uitdrukkingen xy, $(1 - x)(1 - y)$ respectievelijk $x + y - 2xy$ de waarde $\frac{4}{9}$ aannemen.

We bekijken eerst het geval $0 \leq x < \frac{1}{2}$. Merk op dat nu geldt dat $1 - 2x > 0$. Als $(1-x)(1-y) \geq \frac{4}{9}$, dan zijn we klaar. Stel nu dat $(1-x)(1-y) < \frac{4}{9}$. Dan geldt $1 - y < \frac{\frac{4}{9}}{1-x}$, dus $y > 1 - \frac{\frac{4}{9}}{1-x}$. We laten nu zien dat $1 - \frac{\frac{4}{9}}{1-x} \geq \frac{\frac{4}{9}-x}{1-2x}$. Omdat de noemers positief zijn, is het voldoende om te bewijzen dat $(1 - x - \frac{4}{9})(1-2x) \geq (\frac{4}{9} - x)(1-x)$, oftewel $2x^2 - \frac{19}{9}x + \frac{5}{9} \geq x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{4}{9}$, wat neerkomt op $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \geq 0$. Aan de linkerkant staat $(x - \frac{1}{3})^2$, waarmee deze ongelijkheid en dus ook de gevraagde ongelijkheid bewezen is. Nu zijn we klaar, want hieruit volgt wegens $y > 1 - \frac{\frac{4}{9}}{1-x}$ dat $y > \frac{\frac{4}{9}-x}{1-2x}$, dus $y(1-2x) > \frac{4}{9} - x$, oftewel $x + y - 2xy > \frac{4}{9}$. Dus hoe dan ook geldt $M(x,y) \geq \frac{4}{9}$.

Als $x = \frac{1}{2}$, dan is $x + y - 2xy = \frac{1}{2} + y - 2 \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} > \frac{4}{9}$.

We bekijken ten slotte het geval $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Merk op dat nu juist geldt dat $2x - 1 > 0$. Als $xy \geq \frac{4}{9}$, dan zijn we klaar. Stel nu dat $xy < \frac{4}{9}$. Dan geldt $y < \frac{\frac{4}{9}}{x}$. We laten nu zien dat $\frac{\frac{4}{9}}{x} \leq \frac{x-\frac{4}{9}}{2x-1}$. Hiervoor is het voldoende om te laten zien dat $\frac{4}{9}(2x-1) \leq x(x - \frac{4}{9})$, oftewel $\frac{8}{9}x - \frac{4}{9} \leq x^2 - \frac{4}{9}x$, wat neerkomt op $0 \leq x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$. Aan de rechterkant staat $(x - \frac{2}{3})^2$, waarmee deze ongelijkheid en dus ook de gevraagde ongelijkheid bewezen is. Nu zijn we klaar, want hieruit volgt dat $y < \frac{x-\frac{4}{9}}{2x-1}$, dus $y(2x-1) < x - \frac{4}{9}$, oftewel $x + y - 2xy > \frac{4}{9}$. Dus ook nu geldt hoe dan ook $M(x,y) \geq \frac{4}{9}$. $\square$

Opgave 4. In een getallenrij $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ van 1000 verschillende getallen heet een paar (a_i, a_j) met $i < j$ *stijgend* als $a_i < a_j$ en *dalend* als $a_i > a_j$. Bepaal de grootste positieve gehele k met de eigenschap dat in elke rij van 1000 verschillende getallen ten minste k niet-overlappende stijgende paren te vinden zijn of ten minste k niet-overlappende dalende paren.

Oplossing. We gaan bewijzen dat de grootste k gelijk aan 333 is. Bekijk ten eerste de rij $1000, 999, 998, \ldots, 669, 668, 1, 2, 3, \ldots, 666, 667$. De eerste 333 getallen in de rij zijn niet bruikbaar in een stijgend paar, omdat voor elk van deze getallen geldt dat links van dit getal alleen maar grotere getallen staan en rechts van dit getal alleen maar kleinere getallen. Voor de stijgende paren zijn dus alleen de laatste 667 getallen beschikbaar en dat levert hooguit 333 niet-overlappende stijgende paren op. Voor een dalend paar (a_i, a_j) met $i < j$ geldt dat a_i niet één van de getallen 1 tot en met 667 kan zijn, want voor elk van deze getallen geldt dat er rechts van dit getal alleen maar grotere getallen staan. Dus a_i moet één van de eerste 333 getallen zijn, waaruit volgt dat er hooguit 333 niet-overlappende dalende paren zijn. We concluderen dat $k > 333$ niet kan voldoen.

Nu bewijzen we voor alle $t \geq 1$ dat er in een getallenrij van $3t - 1$ verschillende getallen altijd minstens t niet-overlappende stijgende paren of t niet-overlappende dalende paren te vinden zijn. We bewijzen dit met inductie naar t. Voor $t = 1$ geldt dat de getallenrij lengte 2 heeft en dit paar getallen is ofwel stijgend ofwel dalend, dus het klopt. Zij nu $r \geq 1$ en veronderstel dat de bewering waar is voor $t = r$. We bekijken nu $t = r + 1$ en nemen een willekeurige getallenrij $a_1, a_2, \ldots, a_{3r+2}$ met $3r + 2$ verschillende getallen. Als de rij volledig stijgend is, dan kunnen we de rij opdelen in buurparen en die zijn allemaal stijgend. Dit zijn er $\lfloor \frac{3r+2}{2} \rfloor \geq \frac{2r+2}{2} = r + 1$. Als de rij volledig dalend is, zijn er analoog minstens $r + 1$ dalende paren. Als de rij niet volledig stijgend, maar ook niet volledig dalend is, dan is er een plek in de rij waar de rij eerst stijgt en dan daalt of andersom, oftewel: er zijn getallen a_i, a_{i+1}, a_{i+2} in de rij met $a_i < a_{i+1} > a_{i+2}$ of $a_i > a_{i+1} < a_{i+2}$. In beide gevallen zit er in deze drie getallen zowel een stijgend paar als een dalend paar. Pas nu de inductiehypothese toe op de rij $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+3}, a_{i+4}, \ldots, a_{3r+2}$. Dit is een rij met $3r + 2 - 3 = 3r - 1$ verschillende getallen, dus zijn er r niet-overlappende stijgende paren te vinden of r niet-overlappende dalende paren. In het eerste geval voegen we hier het stijgende paar uit a_i, a_{i+1}, a_{i+2} aan toe en in het tweede geval juist het dalende paar. Daarmee hebben we dan $r+1$ niet-overlappende stijgende paren of $r+1$ niet-overlappende dalende paren gevonden. Dat voltooit de inductie.

Vul nu $t = 333$ in dit resultaat in: in een rij van 998 verschillende getallen zijn altijd minstens 333 niet-overlappende stijgende paren of minstens 333 niet-overlappende dalende paren te vinden. In een rij van 1000 getallen geldt dit dus ook (negeer de laatste twee getallen in de rij). Dus $k = 333$ voldoet en is daarmee de grootste k die voldoet. $\square$