# IMO-selectietoets I

woensdag 8 juni 2022

**Opgave 1.** Bepaal alle positieve gehele getallen $n \geq 2$ waarvoor er een positieve deler $m \mid n$ bestaat met

$$n = d^3 + m^3,$$

waarbij $d$ de kleinste deler van $n$ groter dan 1 is.

**Opgave 2.** Gegeven zijn twee cirkels $\Gamma_1$ en $\Gamma_2$ met middelpunten $O_1$ en $O_2$ en gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen $\ell_1$ en $\ell_2$. De lijn $\ell_1$ raakt $\Gamma_1$ in $A$ en $\Gamma_2$ in $B$. Zij $X$ een punt op het lijnstuk $O_1O_2$, maar niet op $\Gamma_1$ of $\Gamma_2$. Het lijnstuk $AX$ snijdt $\Gamma_1$ in $Y \neq A$ en het lijnstuk $BX$ snijdt $\Gamma_2$ in $Z \neq B$.
Bewijs dat de raaklijn in $Y$ aan $\Gamma_1$ en de raaklijn in $Z$ aan $\Gamma_2$ elkaar snijden op $\ell_2$.

**Opgave 3.** Voor reële getallen $x$ en $y$ definiëren we $M(x, y)$ als het maximum van de drie getallen $xy$, $(x-1)(y-1)$ en $x+y-2xy$. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van $M(x, y)$ over alle reële getallen $x$ en $y$ met $0 \leq x, y \leq 1$.

**Opgave 4.** In een getallenrij $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ van 1000 verschillende getallen heet een paar $(a_i, a_j)$ met $i < j$ *stijgend* als $a_i < a_j$ en *dalend* als $a_i > a_j$. Bepaal de grootste positieve gehele $k$ met de eigenschap dat in elke rij van 1000 verschillende getallen ten minste $k$ niet-overlappende stijgende paren te vinden zijn of ten minste $k$ niet-overlappende dalende paren.