



# Selectietoets

vrijdag 18 maart 2022

**Opgave 1.** Vind alle functies  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  waarvoor geldt dat  $f(n) \mid f(m) - n$  dan en slechts dan als  $n \mid m$  voor alle natuurlijke getallen  $m$  en  $n$ .

**Opgave 2.** Zij  $ABC$  een scherphoekige driehoek met  $D$  het voetpunt van de hoogtelijn vanuit  $A$ . De cirkel met middelpunt  $A$  die door  $D$  gaat, snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$  in  $X$  en  $Y$ , waarbij de volgorde van de punten op deze omgeschreven cirkel is:  $A, X, B, C, Y$ . Bewijs dat  $\angle BXD = \angle CYD$ .

**Opgave 3.** Vind alle paren priemgetallen  $(p, q)$  waarvoor geldt dat

$$p(p^2 - p - 1) = q(2q + 3).$$

**Opgave 4.** Gegeven zijn positieve, reële getallen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  met  $n \geq 2$  waarvoor geldt dat  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ . Bewijs dat

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

en bepaal wanneer gelijkheid geldt.

**Opgave 5.** Op een vismarkt staan 10 kraampjes die allemaal dezelfde 10 vissoorten verkopen. Alle vissen zijn gevangen in de Noordzee of de Middellandse Zee, en elk kraampje heeft per vissoort maar één zee van afkomst. Een aantal,  $k$ , klanten koopt van elk kraampje één vis zo dat ze één vis van elke soort hebben. Verder weten we dat elk tweetal klanten een vissoort hebben met verschillende afkomst. We beschouwen alle mogelijke manieren om de kraampjes te vullen volgens de bovenstaande spelregels.

Wat is de maximaal mogelijke waarde van  $k$ ?