IMO-selectietoets I

woensdag 2 juni 2021

Uitwerkingen

Opgave 1. De rij positieve gehele getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gedefinieerd door $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$$

voor alle $n \geq 0$. Bepaal alle gehele getallen $m \geq 2$ waarvoor geldt dat $\text{ggd}(m, a_n) = 1$ voor alle $n \geq 0$.

Oplossing. Een directe formule voor de rij wordt gegeven door $a_n = 2 \cdot n! + 1$ voor $n \geq 0$. (We gebruiken de gangbare definitie $0! = 1$, die voldoet aan $1! = 1 \cdot 0!$, zoals ook voor grotere n geldt $n! = n \cdot (n-1)!$.) We bewijzen de directe formule met inductie. Er geldt $a_0 = 3$ en dat is gelijk aan $2 \cdot 0! + 1$. Stel nu dat voor zekere $k \geq 0$ geldt $a_k = 2 \cdot k! + 1$, dan is

$$a_{k+1} = a_k + k(a_k - 1) = 2 \cdot k! + 1 + k \cdot 2 \cdot k! = 2 \cdot k! \cdot (1 + k) + 1 = 2 \cdot (k+1)! + 1.$$

Dit voltooit de inductie.

We zien dat a_n altijd oneven is, dus $\text{ggd}(2, a_n) = 1$ voor alle n. Daaruit volgt ook dat $\text{ggd}(2^i, a_n) = 1$ voor alle $i \geq 1$. Dus $m = 2^i$ met $i \geq 1$ voldoet. Neem nu een $m \geq 2$ die geen tweemacht is. Dan heeft m een oneven priemdeler, zeg p. We laten zien dat p een deler is van a_{p-3}. Wegens de stelling van Wilson geldt $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. Dus

$$2 \cdot (p-3)! \equiv 2 \cdot (p-1)! \cdot \big((p-2)(p-1)\big)^{-1} \equiv 2 \cdot -1 \cdot (-2 \cdot -1)^{-1} \equiv 2 \cdot -1 \cdot 2^{-1} \equiv -1 \mod p.$$

Dus inderdaad geldt $a_{p-3} = 2 \cdot (p-3)! + 1 \equiv 0 \mod p$. We concluderen dat m niet voldoet. Dus de enige waarden van m die voldoen zijn de tweemachten. $\square$

Opgave 2. Vind alle viertallen (x_1, x_2, x_3, x_4) van reële getallen zodat de volgende zes gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3^2 + x_4^2 + 6x_3x_4, \\ x_1 + x_3 &= x_2^2 + x_4^2 + 6x_2x_4, \\ x_1 + x_4 &= x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3, \\ x_2 + x_3 &= x_1^2 + x_4^2 + 6x_1x_4, \\ x_2 + x_4 &= x_1^2 + x_3^2 + 6x_1x_3, \\ x_3 + x_4 &= x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2. \end{aligned}$$

Oplossing I. De eerste twee vergelijkingen van elkaar afhalen geeft $x_2 - x_3 = x_3^2 - x_2^2 + 6x_4(x_3 - x_2)$, wat we kunnen ontbinden als $0 = (x_3 - x_2)(x_3 + x_2 + 1 + 6x_4)$. We zien dat $x_2 = x_3$ of $x_2 + x_3 + 1 + 6x_4 = 0$. Analoog geldt ook dat $x_2 = x_3$ of $x_2 + x_3 + 1 + 6x_1 = 0$. Dus als $x_2 \neq x_3$, dan geldt in beide gevallen de tweede gelijkheid; die van elkaar afhalen geeft $x_1 = x_4$. We conluderen dat $x_2 = x_3$ of $x_1 = x_4$. Analoog geldt voor elke permutatie (i, j, k, l) van $(1, 2, 3, 4)$ dat $x_i = x_j$ of $x_k = x_l$.

We bewijzen nu dat minstens drie van de x_i gelijk aan elkaar zijn. Als ze alle vier gelijk zijn, is dat natuurlijk waar. Anders zijn er twee die ongelijk zijn, zeg zonder verlies van algemeenheid $x_1 \neq x_2$. Dan geldt $x_3 = x_4$. Als nu $x_1 = x_3$, dan zijn er drie elementen aan elkaar gelijk. Anders is $x_1 \neq x_3$, dus $x_2 = x_4$ en ook dan zijn er drie elementen aan elkaar gelijk. Het viertal (x_1, x_2, x_3, x_4) is dus op volgorde na van de vorm (x, x, x, y), waarbij eventueel mag gelden dat $x = y$.

Dit invullen in de gegeven vergelijkingen geeft $x + y = 8x^2$ en $2x = x^2 + y^2 + 6xy$. Tel deze twee vergelijkingen bij elkaar op: $3x + y = 9x^2 + y^2 + 6xy$. De rechterkant is te ontbinden als $(3x + y)^2$. Met $s = 3x + y$ staat er dus $s = s^2$, waaruit volgt $s = 0$ of $s = 1$. Er geldt $s = 3x + y = 2x + (x + y) = 2x + 8x^2$. Dus $8x^2 + 2x = 0$ of $8x^2 + 2x = 1$.

In het eerste geval geldt $x = 0$ of $x = -\frac{1}{4}$. We vinden $y = 0 - 3x = 0$ respectievelijk $y = 0 - 3x = \frac{3}{4}$. In het tweede geval kunnen we de vergelijking ontbinden als $(4x-1)(2x+1) = 0$, dus $x = \frac{1}{4}$ of $x = -\frac{1}{2}$. We vinden $y = 1 - 3x = \frac{1}{4}$ respectievelijk $y = 1 - 3x = \frac{5}{2}$.

Alles bij elkaar hebben we de volgende viertallen gevonden: $(0, 0, 0, 0)$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ en de permutaties hiervan, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ en de permutaties hiervan. Controleren laat zien dat al deze viertallen voldoen. □

Oplossing II. Alle gelijkheden optellen geeft

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

De rechterkant laat zich ontbinden als $3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$. Schrijf $s=x_1+x_2+x_3+x_4$, dan vinden we dus nu de vergelijking $3s=3s^2$ met oplossingen $s=0$ en $s=1$.

Zij (i,j,k,l) een permutatie van $(1,2,3,4)$. Dan geldt

$$s-(x_i+x_j)=x_k+x_l=x_i^2+x_j^2+6x_ix_j,$$

dus

$$x_i^2+x_j^2+6x_ix_j+x_i+x_j-s=0. \tag{1}$$

Voor een vaste j is dit een kwadratische vergelijking in x_i, met maximaal twee oplossingen. Bij een vaste j kunnen we voor i drie verschillende waarden kiezen, dus volgens het ladenprincipe zijn twee van die mogelijke x_i gelijk aan elkaar. Voor elke x_j geldt dus dat van x_i, x_k en x_l er twee gelijk aan elkaar zijn.

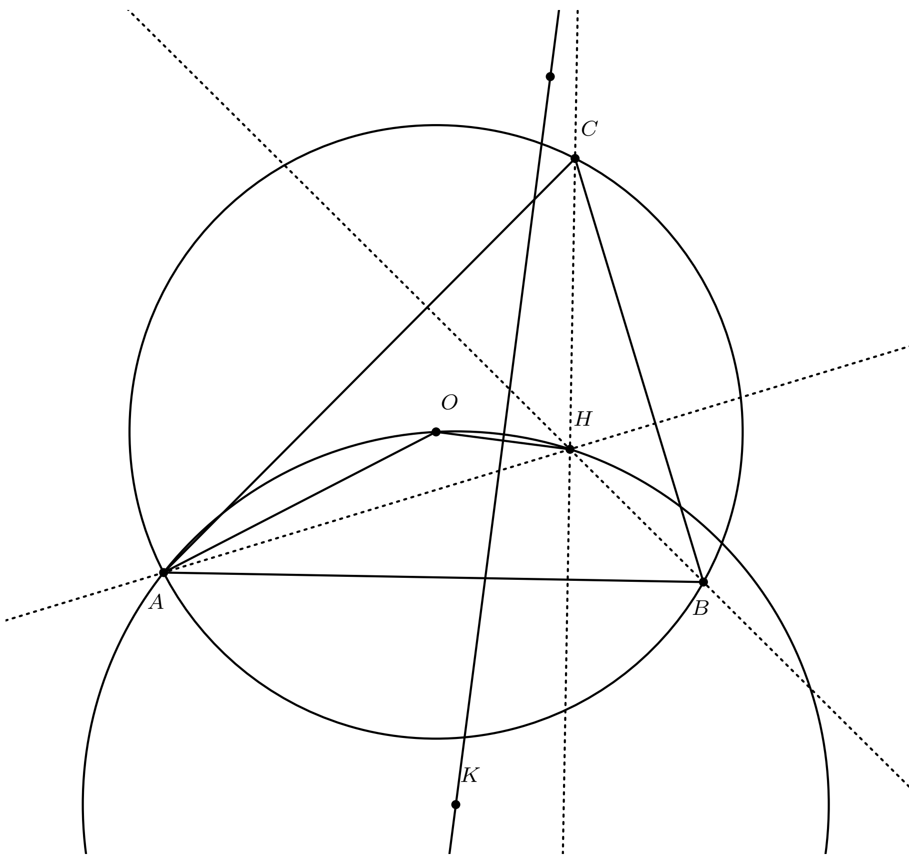
In het bijzonder zijn twee van x_2, x_3 en x_4 gelijk aan elkaar, zeg $x_3=x_4$. Nu nemen we $j=3$ en zien we dat van x_1, x_2 en x_4 er twee gelijk aan elkaar zijn. Als x_4 daarbij zit, hebben we drie gelijke elementen. Als x_4 er niet bij zit, geldt $x_1=x_2$ en $x_3=x_4$. Op volgorde na moeten de viertallen dus van de vorm (x,x,x,y) of (x,x,y,y) zijn. Vul nu in (1) $x_i=x$ en $x_j=x$ in. Dan staat er $8x^2+2x-s=0$. We gaan nu gevallen naar s onderscheiden.

Stel dat $s=0$. Dan geldt er $8x^2+2x=0$, dus $x=0$ of $x=-\frac{1}{4}$. Als $x=0$, dan zijn dus twee of drie van de elementen gelijk aan 0. Verder weten we dat de som van de vier elementen nul moet zijn en dat als er nog twee elementen over zijn, die gelijke waarde moeten hebben. We zien dat alleen $(0,0,0,0)$ mogelijk is. Als $x=-\frac{1}{4}$, dan vullen we x en y in in (1). Dat geeft $y^2+\frac{1}{16}-\frac{6}{4}y+y-\frac{1}{4}=0$, oftewel $y^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{16}=0$. Dit kunnen we herschrijven als $(y+\frac{1}{4})(y-\frac{3}{4})=0$, dus $y=-\frac{1}{4}$ of $y=\frac{3}{4}$. Omdat de som van de vier elementen 0 moet zijn, kan (op volgorde na) alleen $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$.

Stel dat $s=1$. Dan geldt er $8x^2+2x-1=0$, wat te schrijven is als $(4x-1)(2x+1)=0$, dus $x=\frac{1}{4}$ of $x=-\frac{1}{2}$. Als $x=\frac{1}{4}$, dan vullen we x en y in in (1). Dat geeft $y^2+\frac{1}{16}+\frac{6}{4}y+y+\frac{1}{4}-1=0$, oftewel $y^2+\frac{5}{2}y-\frac{11}{16}=0$. Dit kunnen we herschrijven als $(y-\frac{1}{4})(y+\frac{11}{4})=0$, dus $y=\frac{1}{4}$ of $y=-\frac{11}{4}$. Omdat de som van de vier elementen 1 moet zijn, kan alleen $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. Als $x=-\frac{1}{2}$, dan vullen we x en y in in (1). Dat geeft $y^2+\frac{1}{4}-3y+y-\frac{1}{2}-1=0$, oftewel $y^2-2y-\frac{5}{4}=0$. Dit kunnen we herschrijven als $(y+\frac{1}{2})(y-\frac{5}{2})=0$, dus $y=-\frac{1}{2}$ of $y=\frac{5}{2}$. Omdat de som van de vier elementen 1 moet zijn, kan (op volgorde na) alleen $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

Alles bij elkaar hebben we de volgende viertallen gevonden: $(0,0,0,0)$, $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ en de permutaties hiervan, $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ en $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ en de permutaties hiervan. Controleren laat zien dat al deze viertallen voldoen. $\square$

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige en niet-gelijkbenige driehoek met hoogtepunt H. Zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC en zij K het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek AHO. Bewijs dat de spiegeling van K in OH op BC ligt.



Oplossing. We bekijken de configuratie zoals in de figuur. Andere configuraties gaan analoog. Noem D het tweede snijpunt van AH met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Noem S het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van ABC en de omgeschreven cirkel van AHO. (Omdat $\triangle ABC$ scherphoekig is, liggen O en H inwendig in driehoek ABC en dus ook in zijn omgeschreven cirkel, dus D en S bestaan allebei.)

Er geldt

$$\angle OSH = \angle OAH = \angle OAD = \angle ODA = \angle ODH,$$

waarbij we gebruiken dat $|OA| = |OD|$. Verder geldt

$$\angle OHD = 180^\circ - \angle OHA = 180^\circ - \angle OSA = 180^\circ - \angle OAS = \angle OHS,$$

waarbij we gebruiken dat $|OA| = |OS|$. We concluderen nu dat $\triangle OHS \cong \triangle OHD$ (ZHH). Hieruit volgt dat D en S elkaars gespiegelde in OH zijn.

Als we het middelpunt K van de omgeschreven cirkel van $\triangle OHS$ spiegelen in OH, krijgen we dus het middelpunt L van de omgeschreven cirkel van $\triangle OHD$. We moeten nu bewijzen dat L op BC ligt.

Punt D is de spiegeling van H in BC. Dit is een bekend feit, dat we als volgt kunnen bewijzen: $\angle DBC = \angle DAC = \angle HAC = 90^\circ - \angle ACB = \angle HBC$ en analoog is $\angle DCB = \angle HCB$, dus $\triangle DBC \cong \triangle HBC$ (HZH). Dus inderdaad is D de spiegeling van H in BC, waaruit volgt dat BC de middelloodlijn van HD is. Omdat L op de middelloodlijn van HD ligt, ligt L op BC en dat is wat we wilden bewijzen. $\square$

Opgave 4. Op een rechthoekig bord met $m \times n$ vakjes ($m, n \geq 3$) liggen domino's (2×1- of 1×2-tegels), die elkaar niet overlappen en niet uitsteken buiten het bord. Elke domino bedekt precies twee vakjes van het bord. Neem aan dat de bedekking met domino's de eigenschap heeft dat er geen enkele domino meer bijgeplaatst kan worden op het bord en dat de vier hoekvakjes van het bord niet allemaal leeg zijn. Bewijs dat minstens $\frac{2}{3}$ van de vakjes van het bord bedekt zijn met domino's.

Oplossing. Koppel elk leeg vakje aan de domino die direct rechts van dit vakje ligt (tenzij het vakje aan de rechterrand van het bord ligt). Stel dat er nu twee lege vakjes aan dezelfde domino gekoppeld worden, dan moet deze domino verticaal liggen en zijn beide vakjes links van hem leeg. Echter, dan zou er daar nog een extra domino passen, tegenspraak. Dus er worden geen twee lege vakjes aan dezelfde domino gekoppeld.

De lege vakjes aan de rechterrand van het bord zijn nog niet gekoppeld. We proberen deze vakjes elk te koppelen aan een domino die direct links van zich geen leeg vakje heeft (en dus nog niet gekoppeld was). Neem eerst even aan dat het lukt om alle lege vakjes van de rechterrand op deze manier te koppelen aan verschillende domino's. We hebben dan alle lege vakjes van het bord gekoppeld aan een domino, waarbij geen domino twee keer gebruikt wordt. Omdat elke domino twee vakjes van het bord bedekt, zijn er voor elk leeg vakje twee bedekte vakjes en is dus hooguit $\frac{1}{3}$ van de vakjes van het bord leeg. Dan zijn we klaar.

We gaan nu laten zien dat deze koppeling altijd lukt. Noem k het aantal lege vakjes aan de rechterrand en ℓ het aantal lege vakjes aan de linkerrand. De lege vakjes aan de linkerrand mogen niet naast elkaar liggen, dus liggen er minstens $\ell - 1$ domino's aan de linkerrand en deze hebben allemaal geen leeg vakje links van zich. Als $\ell > k$, dan liggen er dus genoeg domino's aan de linkerrand liggen om alle lege vakjes van de rechterrand te koppelen. Als $\ell < k$, dan zouden we de hele situatie kunnen omdraaien en juist alle lege vakjes koppelen aan de domino links daarvan en zouden we daarmee ook kunnen bewijzen dat hooguit $\frac{1}{3}$ van de vakjes van het bord leeg is. De enige situatie die nog over is, is als $\ell = k$ en er zowel links als rechts precies $k - 1$ domino's aan de rand liggen. Aan beide randen geldt dan dat er tussen elke twee domino's een leeg vakje zit en er ook een leeg vakje in de hoeken zit. Maar dit is in tegenspraak met de voorwaarde in de opgave dat niet alle hoekvakjes leeg zijn. Deze situatie kan dus niet voorkomen. $\square$