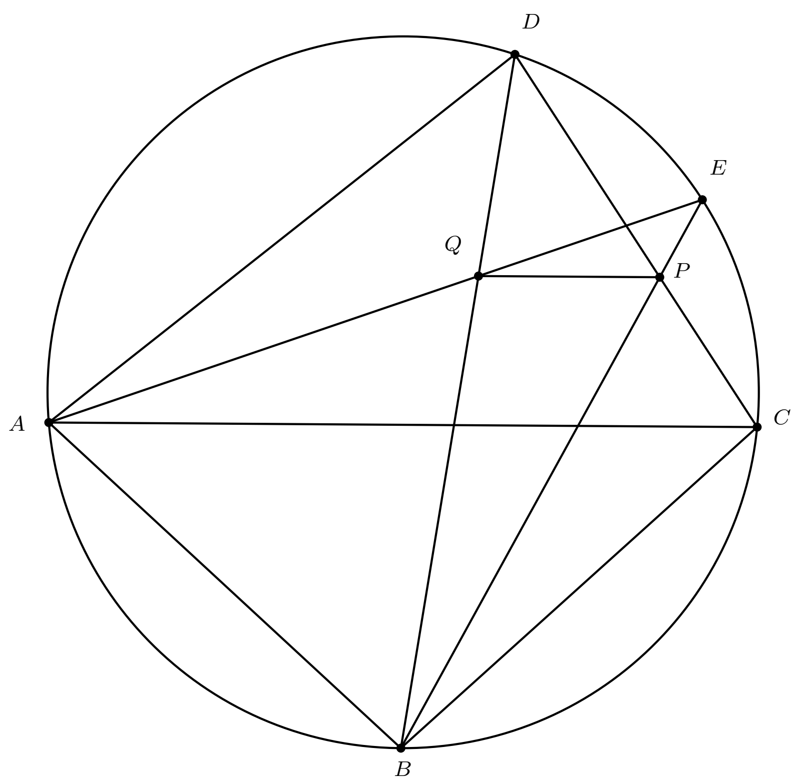
Selectietoets

vrijdag 5 maart 2021

Uitwerkingen

Opgave 1. Gegeven is een koordenvierhoek $ABCD$ met $|AB| = |BC|$. Punt E ligt op de boog CD waar A en B niet op liggen. Het snijpunt van BE en CD noemen we P, het snijpunt van AE en BD noemen we Q. Bewijs dat $PQ \parallel AC$.



Oplossing. Omdat $|AB| = |BC|$ geldt $\angle AEB = \angle BDC$, dus $\angle QEP = \angle AEB = \angle BDC = \angle QDP$, waaruit volgt dat $QPED$ een koordenvierhoek is. Dus $\angle QPD = \angle QED = \angle AED = \angle ACD$. Dit betekent wegens F-hoeken dat QP en AC evenwijdig zijn. $\square$

Opgave 2. Bepaal alle drietallen (x, y, z) van reële getallen waarvoor geldt

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

Oplossing. Het stelsel vergelijkingen is symmetrisch: verwissel je bijvoorbeeld x en y, dan blijft de derde vergelijking hetzelfde en wisselen de eerste twee vergelijkingen om. We kunnen dus zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $x \geq y \geq z$. Dan wordt het stelsel:

$$x^2 - yz = y - z + 1,$$
$$y^2 - zx = x - z + 1,$$
$$z^2 - xy = x - y + 1.$$

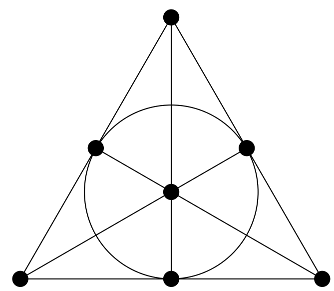
De eerste twee vergelijkingen van elkaar afhalen geeft $x^2 - y^2 + z(x - y) = y - x$, oftewel $(x - y)(x + y + z + 1) = 0$. Hieruit volgt $x = y$ of $x + y + z = -1$. De tweede en derde vergelijking van elkaar afhalen geeft $y^2 - z^2 + x(y - z) = y - z$, oftewel $(y - z)(y + z + x - 1) = 0$. Hieruit volgt $y = z$ of $x + y + z = 1$.

We onderscheiden nu twee gevallen: $x = y$ en $x \neq y$. In het eerste geval geldt $y \neq z$, want anders zou $x = y = z$ en dat geeft in de eerste vergelijking $0 = 1$, tegenspraak. Er volgt dus nu $x + y + z = 1$, oftewel $2x + z = 1$. Invullen van $y = x$ en $z = 1 - 2x$ in de eerste vergelijking geeft $x^2 - x(1 - 2x) = x - (1 - 2x) + 1$, wat we herleiden tot $3x^2 - x = 3x$, oftewel $3x^2 = 4x$. Dit geeft $x = 0$ of $x = \frac{4}{3}$. Met $x = 0$ vinden we $y = 0$, $z = 1$, maar dit voldoet niet aan onze aanname $x \geq y \geq z$. We houden dus alleen de optie $x = \frac{4}{3}$ over en dat geeft het drietal $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$. Controleren laat zien dat dit een oplossing is.

Nu het geval $x \neq y$. Dan geldt $x + y + z = -1$, dus kan niet ook gelden $x + y + z = 1$, dus we zien dat $y = z$. Nu geeft $x + y + z = -1$ dat $x + 2z = -1$, dus $x = -1 - 2z$. De eerste vergelijking wordt nu $(-1 - 2z)^2 - z^2 = 1$, wat we herleiden tot $3z^2 + 4z = 0$. Hieruit vinden we $z = 0$ of $z = -\frac{4}{3}$. Met $z = 0$ vinden we $y = 0$, $x = -1$, maar dit voldoet niet aan onze aanname $x \geq y \geq z$. We houden dus alleen de optie $z = -\frac{4}{3}$ over en dat geeft het drietal $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$. Controleren laat zien dat dit een oplossing is.

Door de permutaties van deze twee oplossingen ook mee te nemen, vinden we al met al zes oplossingen: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$, $(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$, $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$ en $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$. $\square$

Opgave 3. Zij p een priemgetal groter dan 2. Patricia wil 7 niet-noodzakelijk verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, p\}$ aan de zwarte stippen in onderstaande figuur toekennen, op zo'n manier dat het product van drie getallen op een lijn of cirkel altijd dezelfde rest bij deling door p heeft.



(a) Stel dat Patricia het getal p minstens één keer gebruikt. Hoe vaak heeft ze het getal p dan in totaal minimaal nodig?

(b) Stel dat Patricia het getal p niet gebruikt. Op hoeveel manieren kan zij dan de getallen toekennen? (Twee manieren zijn verschillend als er aan minstens één zwarte stip verschillende getallen zijn toegekend. De figuur wordt niet gedraaid of gespiegeld.)

Oplossing I.

(a) Met *'lijnen'* bedoelen we in het vervolg van dit onderdeel de zes lijnen en de cirkel. Zodra het getal p ergens gebruikt wordt, is er een 'lijn' met product deelbaar door p, dus met rest 0 na deling door p. Alle 'lijnen' moeten dan rest 0 geven, dus alle 'lijnen' bevatten minstens één keer p. Dit kunnen we bereiken door het getal p aan de onderste drie stippen toe te kennen. Stel dat het ook al kan met hooguit twee keer p. Elke stip ligt op precies drie 'lijnen', dus dan zijn er hooguit zes 'lijnen' waar een getal p op ligt. Er zijn echter zeven 'lijnen', dus dit kan niet. We concluderen dat ze p in totaal minimaal drie keer nodig heeft.

(b) Noem de onderste drie getallen van links naar rechts a, b en c. Noem het getal midden op de linkerzijkant van de driehoek d. We kunnen nu alle getallen modulo p uitrekenen; merk op dat alle getallen inverteerbaar zijn modulo p omdat p zelf niet meedoet en p priem is. De onderste lijn heeft product abc. De linkerzijde van de driehoek dus ook, dus het getal helemaal bovenin is modulo p congruent aan $abc(ad)^{-1} = bcd^{-1}$. Als we de lijn van rechtsonder naar het midden van de linkerzijde bekijken, zien we dat het middelste getal congruent moet zijn aan $abc(cd)^{-1} = abd^{-1}$. Door de cirkel te bekijken, vinden we dat het getal rechts in het midden $abc(bd)^{-1} = acd^{-1}$ is.

Op de rechterzijde krijgen we nu de vergelijking $bcd^{-1} \cdot acd^{-1} \cdot c \equiv abc \mod p$, dus $c^2 \equiv d^2 \mod p$. Analoog vinden we op de verticale lijn $b^2 \equiv d^2$ en op de lijn van linksonder naar rechts midden $a^2 \equiv d^2 \mod p$. We concluderen dat de getallen a, b, c en d allemaal hetzelfde kwadraat moeten hebben. Uit $x^2 \equiv y^2$ volgt $(x-y)(x+y) \equiv 0 \mod p$, dus $p \mid x - y$ of $p \mid x + y$, want p is priem. Dus geldt $x \equiv y$ of $x \equiv -y$. Dat zijn twee opties, want zou $y \equiv -y$, dan $2y \equiv 0$, dus $p \mid 2y$, dus $p \mid y$ wegens $p > 2$; tegenspraak. Er geldt dus dat de getallen b, c en d allemaal congruent aan a of $-a$ moeten zijn. Als aan deze voorwaarde voldaan is, dan geldt $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv d^2$ en dan volgt uit het voorgaande dat op alle zes de lijnen en op de cirkel het product congruent aan abc is.

Er zijn $p-1$ mogelijkheden voor het getal a en daarna 2 mogelijkheden voor elk van de getallen b, c en d. Dus totaal zijn er $8(p-1)$ manieren om de getallen toe te kennen. $\square$

Oplossing II. Als alternatieve oplossing voor onderdeel (b) laten we zien dat ofwel alle zeven getallen hetzelfde zijn, dan wel dat er een 'lijn' k is waarvan de drie punten waarde x hebben terwijl de overige vier punten waarde $-x$ hebben. Merk op dat $-x \not\equiv x$ wegens $p > 2$.

Merk op dat deze toekenningen in ieder geval voldoen: in het eerste geval is het product van de drie punten op elke 'lijn' uiteraard hetzelfde; in het tweede geval is het x^3 voor 'lijn' k, en $x(-x)^2 = x^3$ voor elk van de zes andere lijnen, waarbij we gebruiken dat elk van deze andere lijnen precies één punt met k gemeen heeft. Het aantal manieren waarop ze dit kan doen is $p - 1$ in het eerste geval, en $7(p - 1)$ in het tweede geval (namelijk 7 keuzes voor de 'lijn' k en per keuze vervolgens $p-1$ keuzes voor x), dus in totaal $(p-1)+7(p-1) = 8(p-1)$.

Gegeven twee verschillende stippen met waarden x en y. Noem de waarde bij de derde stip op de lijn door x en y nu z en de andere vier waarden a, b, c, d, dan geldt (z.b.d.a.) dat $xab \equiv xcd \equiv ycb \equiv yad \equiv zac \equiv zbd \equiv xyz$. Dus $x^2abcd = (xab)(xcd) \equiv (ycd)(yad) = y^2(abcd)$, dus $x^2 \equiv y^2$, omdat we mogen delen door $abcd \not\equiv 0$. Uit $p \mid x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$ volgt dat $p \mid x - y$ of $p \mid x + y$, dus $y \equiv x$ of $y \equiv -x$. Houden we een punt met waarde x vast, dan zien we dat elk ander punt dus waarde x of $-x$ heeft.

Stel dat niet alle punten dezelfde waarde hebben. Dan komen x en $y \equiv -x$ dus beide voor, dus is er een lijn met daarop de punten x, y en (z.b.d.a.) $z = y$. Deze heeft product $xy^2 = -y^3$. Omdat $y^3 \not\equiv -y^3$ (anders zou $p \mid 2y^3$ dus $p \mid y$), bevat nu elke lijn precies 1 of 3 keer een punt met waarde x. De producten die we voor de overige zes 'lijnen' vinden zijn $xab \equiv xcd \equiv ycb \equiv yad \equiv yac \equiv ybd$. De laatste vier producten kunnen niet uit drie maal factor x bestaan, dus bevatten precies één x, dus geldt z.b.d.a. $(a, b, c, d) = (x, x, y, y)$. Dat betekent dat $(x, a, b) = (x, x, x)$, terwijl de punten die niet op deze lijn liggen allemaal waarde $y \equiv -x$ hebben, zoals we wilden bewijzen. $\square$

Opgave 4. Jesse en Tjeerd spelen een spelletje. Jesse heeft de beschikking over $n \geq 2$ stenen. Er zijn twee dozen: in de zwarte doos is ruimte voor de helft van de stenen (naar beneden afgerond) en in de witte doos is ruimte voor de helft van de stenen (naar boven afgerond). Jesse en Tjeerd zijn om en om aan de beurt, waarbij Jesse begint. Jesse pakt in zijn beurt steeds één nieuwe steen, schrijft een positief reëel getal op de steen en legt hem in één van de dozen die nog niet vol is. Tjeerd ziet al deze getallen op de stenen in de dozen en mag in zijn beurt één steen naar keuze uit een doos verplaatsen naar de andere doos als die nog niet vol is, maar hij mag er ook voor kiezen om niets te doen. Het spel stopt zodra beide dozen vol zijn. Als dan de totale waarde van de stenen in de zwarte doos groter is dan de totale waarde van de stenen in de witte doos, wint Jesse; anders wint Tjeerd. Bepaal voor elke $n \geq 2$ wie er met zekerheid kan winnen (en geef een bijbehorende winnende strategie).

Oplossing I. Als n even is, komen er in allebei de dozen precies evenveel stenen. Jesse kan nu winnen door de eerste $n-1$ stenen allemaal waarde 2 te geven en ze in een willekeurige doos te stoppen. Tjeerd verplaatst na elke zet van Jesse eventueel een steen. Als Jesse's laatste steen in de zwarte doos moet, geeft hij deze steen waarde 3. Dan wint hij, want de totale waarde in de zwarte doos is dan 1 groter dan in de witte doos. Als zijn laatste steen in de witte doos moet, geeft hij deze steen waarde 1. Ook nu is de totale waarde in de zwarte doos 1 groter dan in de witte doos, dus Jesse wint.

Bekijk nu het geval dat n oneven is, zeg $n = 2m+1$ met $m \geq 1$. In de zwarte doos kunnen m stenen en in de witte kunnen $m+1$ stenen. Jesse kan nu weer winnen. De eerste $n-2$ stenen geeft hij allemaal waarde 1 en legt hij in een willekeurige doos. Tjeerd verplaatst na elke zet van Jesse weer eventueel een steen. We onderscheiden nu twee gevallen voor het moment dat Jesse aan de beurt is en er nog twee lege plekken in de dozen zijn.

- Geval 1: de zwarte doos is vol. De waarde van de zwarte doos is nu m, die van de witte doos $m-1$. Jesse legt nu een steen met waarde $\frac{1}{4}$ in de witte doos. Als Tjeerd vervolgens niet een steen verplaatst, geeft Jesse de laatste steen ook waarde $\frac{1}{4}$. De totale waarde van de witte doos is dan $(m-1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = m - \frac{1}{2}$ en dat is kleiner dan de totale waarde in de zwarte doos. Als Tjeerd wel iets verplaatst, dan moet dat een steen uit de zwarte doos zijn die naar de witte doos gaat (immers, de zwarte doos is vol). Daarmee is de waarde in de witte doos $(m-1)+\frac{1}{4}+1 = m+\frac{1}{4}$ geworden en die in de zwarte doos $m-1$. Jesse legt nu de laatste steen met waarde 2 in de zwarte doos, zodat de totale waarde in de zwarte doos $(m-1)\cdot 1 + 1 \cdot 2 = m+1$ wordt.
- Geval 2: de zwarte doos is nog niet vol. Jesse legt nu een steen met waarde 3 in de zwarte doos. Als Tjeerd deze steen niet verplaatst, geeft Jesse de laatste steen waarde 1. Dan is de totale waarde in de witte doos $m+1$ en in de zwarte doos $(m-1)\cdot 1 + 1 \cdot 3 = m+2$. Als Tjeerd de steen met waarde 3 wel verplaatst, dan komt er een plek vrij in de zwarte doos, dus daar legt Jesse zijn laatste steen en deze

geeft hij waarde 5. De totale waarde van de witte doos is nu $m \cdot 1 + 1 \cdot 3 = m + 3$ en de totale waarde van de zwarte doos $(m-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 = m + 4$.

We zien dat Jesse in alle gevallen ervoor kan zorgen dat de totale waarde in de zwarte doos groter is dan die in de witte doos, dus Jesse wint altijd. $\square$

Oplossing II. De volgende oplossing laat zien dat het niet uitmaakt hoe groot de capaciteit van de twee dozen is, als de capaciteit in totaal maar n is (en minstens 1 per stuk). Jesse kan altijd winnen en doet dat door eerst de tweemacht $2^0 = 1$ te spelen, en vervolgens telkens de eerstvolgende kleinere of grotere tweemacht. Dus als hij op zeker moment al

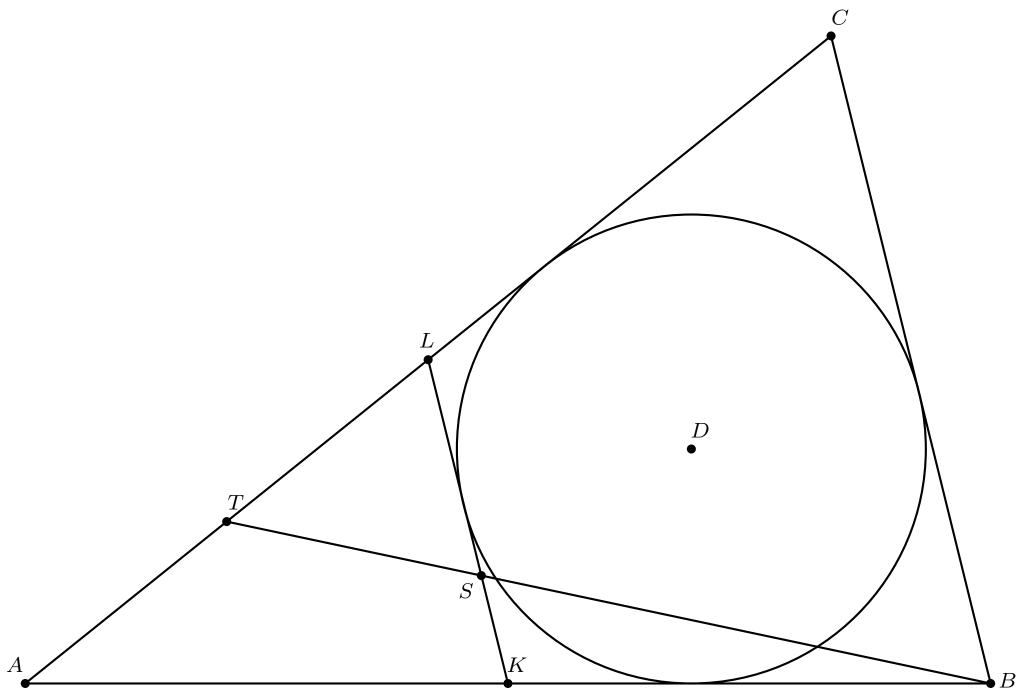
$$2^{-i}, 2^{-(i-1)}, \dots, 2^{-1}, 2^0, 2^1, \dots, 2^{j-1}, 2^j$$

heeft gespeeld, speelt hij in de volgende beurt ofwel $2^{-(i+1)}$, dan wel 2^{j+1}.

Jesse kan er door handig te spelen voor zorgen dat de grootste tweemacht onder de gespeelde stenen na zijn beurt altijd in de zwarte doos zit. We bewijzen deze claim met inductie. Bij zijn eerste zet plaatst hij de steen met waarde 2^0 in de zwarte doos en klopt de claim; dit bewijst de inductiebasis. Als hij later weer aan de beurt is en Tjeerd heeft in de vorige zet de tot dan toe grootste tweemacht, die volgens de inductiehypothese in de zwarte doos zat, verplaatst naar de witte doos, dan is er in de zwarte doos een plek vrijgekomen en kan Jesse daar de volgende grotere tweemacht neerzetten en klopt de claim weer. Als Tjeerd iets anders heeft verplaatst of niets heeft gedaan, dan staat de tot dan toe grootste tweemacht nog altijd in de zwarte doos en speelt Jesse juist de volgende kleinere tweemacht; het maakt niet uit waar hij die neerzet. Ook nu klopt de claim weer. Dit bewijst de inductiestap, waarmee we de claim hebben bewezen.

Na het spelen van de laatste steen staat de grootste gespeelde tweemacht dus in de zwarte doos. Die is groter dan de som van alle gespeelde kleinere tweemachten ($2^j > 2^j - 2^{-i} = 2^{j-1} + 2^{j-2} + \cdots + 2^{-(i-1)} + 2^{-i}$), dus zeker groter dan de som van alle tweemachten in de witte doos. Dus de totale waarde van de zwarte doos is groter dan de totale waarde van de witte doos. $\square$

Opgave 5. Gegeven is een driehoek ABC met de eigenschap dat $|AB| + |AC| = 3|BC|$. Zij T het punt op lijnstuk AC zodat $|AC| = 4|AT|$. Laat K en L punten zijn op het inwendige van respectievelijk lijnstukken AB en AC zodat ten eerste $KL \parallel BC$ en ten tweede KL raakt aan de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zij S het snijpunt van BT en KL. Bepaal de verhouding $\frac{|SL|}{|KL|}$.



Oplossing I. De vierhoek $KBCL$ raakt met alle zijden aan de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Bij elk hoekpunt zitten twee gelijke raaklijnstukjes. Twee overstaande zijden van de vierhoek bestaan samen precies uit de vier verschillende raaklijnstukjes, dus geldt $|KB| + |LC| = |KL| + |BC|$.

Vanwege $KL \parallel BC$ geldt $\triangle AKL \sim \triangle ABC$. Noem t de vermenigvuldigingsfactor van deze gelijkvormigheid, dus $|AK| = t|AB|$, $|AL| = t|AC|$ en $|KL| = t|BC|$. Dan is $|BK| = |AB| - |AK| = |AB| - t|AB| = (1-t)|AB|$. Analoog geldt $|CL| = (1-t)|AC|$. Er geldt nu

$$t|BC| + |BC| = |KL| + |BC| = |KB| + |LC| = (1-t)|AB| + (1-t)|AC| = 3(1-t)|BC|,$$

waarbij de laatste gelijkheid geldt vanwege het gegeven in de opgave. Delen door $|BC|$ geeft nu $1 + t = 3 - 3t$, oftewel $4t = 2$ dus $t = \frac{1}{2}$. We concluderen dat K het midden van AB is en L het midden van AC.

We wisten al $\triangle AKL \sim \triangle ABC$, waaruit volgt $\frac{|KL|}{|BC|} = \frac{|AL|}{|AC|}$. Er geldt wegens $KL \parallel BC$ ook $\triangle TSL \sim \triangle TBC$, dus $\frac{|SL|}{|BC|} = \frac{|TL|}{|TC|}$. Combineren we deze verhoudingen, dan krijgen we

$$\frac{|SL|}{|KL|} = \frac{|SL|}{|BC|} \cdot \frac{|BC|}{|KL|} = \frac{|TL|}{|TC|} \cdot \frac{|AC|}{|AL|}.$$

We weten dat $\frac{|AC|}{|AL|} = 2$, omdat L het midden van AC is. Dit betekent ook dat T het midden van AL is, aangezien $4|AT| = |AC| = 2|AL|$. Dus $\frac{|TL|}{|TC|} = \frac{\frac{1}{4}|AC|}{\frac{3}{4}|AC|} = \frac{1}{3}$. We concluderen dat $\frac{|SL|}{|KL|} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$. $\square$

Oplossing II. Noem r de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. De oppervlakte van driehoek ABC is te schrijven als

$$\frac{1}{2}|AB| \cdot r + \frac{1}{2}|BC| \cdot r + \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}r \cdot (3|BC| + |BC|) = 2r|BC|.$$

Anderzijds is de oppervlakte van driehoek ABC gelijk aan $\frac{1}{2}h|BC|$ met h de hoogte vanuit A. Dus $h = 4r$. Omdat de afstand van KL tot BC precies $2r$ is, is de afstand van A tot KL ook $2r$. Driehoek AKL en ABC zijn gelijkvormig wegens $KL \parallel BC$, met de hoogtes vanuit A gelijk aan respectievelijk $2r$ en $4r$, dus de vermenigvuldigingsfactor is precies 2. Dus K is het midden van AB en L is het midden van AC.

Voor punt T geldt $|AC| = 4|AT|$, dus $|AT| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{1}{2}|AL|$, dus T is het midden van AL. Bekijk nu driehoek ABL. Hierin is BT een zwaartelijn, want T is het midden van AL. Ook is LK een zwaartelijn, want K is het midden van AB. Dus hun snijpunt S is het zwaartepunt, waaruit volgt dat $\frac{|SL|}{|KL|} = \frac{2}{3}$. $\square$