IMO-selectietoets I

woensdag 10 juni 2020

Opgave 1. In scherphoekige driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel en geldt $|AC| + |AI| = |BC|$. Bewijs dat $\angle BAC = 2\angle ABC$.

Opgave 2. Bepaal alle polynomen $P(x)$ met reële coëfficiënten waarvoor geldt

$$P(x^2) + 2P(x) = P(x)^2 + 2.$$

Opgave 3. Voor een positief geheel getal n bekijken we een $n \times n$-bord en tegels met afmetingen 1×1, 1×2, ..., $1 \times n$. Op hoeveel manieren kunnen er precies $\frac{1}{2}n(n+1)$ vakjes van het bord rood worden gekleurd, zodat de rode vakjes allemaal bedekt kunnen worden door de n tegels allemaal horizontaal te plaatsen, maar ook door de n tegels allemaal verticaal te plaatsen? Twee kleuringen die niet identiek zijn, maar door draaiing of spiegeling van het bord in elkaar overgaan, tellen als verschillend.

Opgave 4. Laat $a, b \geq 2$ positieve gehele getallen met $\text{ggd}(a, b) = 1$ zijn. Zij r de kleinste positieve waarde die aangenomen wordt bij een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, met c en d positieve gehele getallen die voldoen aan $c \leq a$ en $d \leq b$. Bewijs dat $\frac{1}{r}$ geheel is.