Selectietoets

vrijdag 6 maart 2020

Uitwerkingen

Opgave 1. Voor een geheel getal $n \geq 3$ bekijken we een cirkel met n punten erop. We plaatsen een positief geheel getal bij elk punt, waarbij de getallen niet noodzakelijk verschillend hoeven te zijn. Zo'n plaatsing van getallen heet *stabiel* als drie getallen naast elkaar altijd product n hebben. Voor hoeveel waarden van n met $3 \leq n \leq 2020$ is het mogelijk om getallen op een stabiele manier te plaatsen?

Oplossing. Stel dat n geen veelvoud van 3 is en dat we een stabiele plaatsing hebben van de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die in die volgorde op de cirkel liggen. Er geldt dan $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 3$ voor alle i, waarbij we de indices modulo n rekenen. Dus

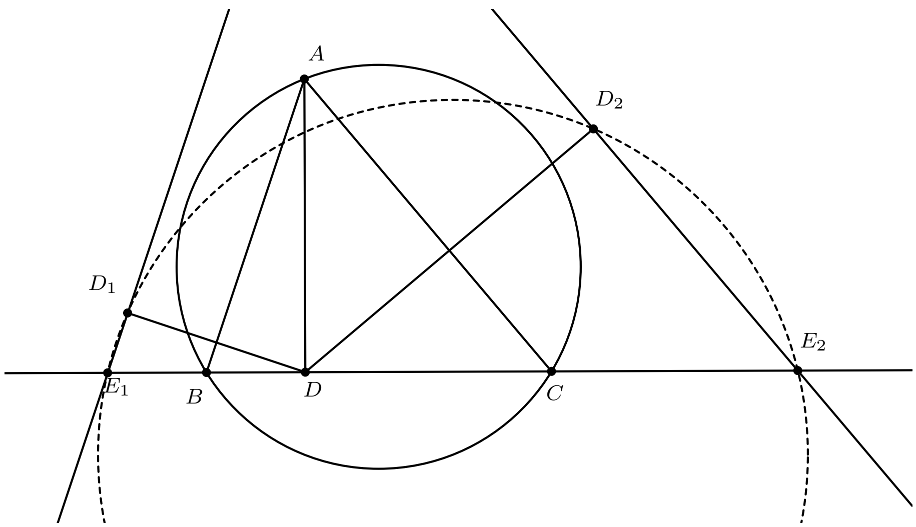
$$a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3} = n = a_i a_{i+1} a_{i+2},$$

waaruit volgt dat $a_{i+3} = a_i$ (aangezien alle getallen positief zijn). Met inductie vinden we dat voor alle $k \geq 0$ geheel geldt $a_{3k+1} = a_1$. Omdat n geen drievoud is, nemen de getallen $3k+1$ voor $k \geq 0$ alle waarden modulo n aan: immers, 3 heeft een multiplicatieve inverse modulo n, dus $k \equiv 3^{-1} \cdot (b-1)$ geeft $3k+1 \equiv b \mod n$ voor alle b. We concluderen dat alle getallen op de cirkel gelijk zijn aan a_1. Er moet dus gelden dat $a_1^3 = n$, waarbij a_1 positief geheel is. Dus als n geen drievoud is, dan moet n een derdemacht zijn.

Als n een drievoud is, dan zetten we achteraanvolgens de getallen $1, 1, n, 1, 1, n, \ldots$ neer op de cirkel. Het product van drie getallen naast elkaar is nu altijd $1 \cdot 1 \cdot n = n$. Als n een derdemacht is, zeg $n = m^3$, dan zetten we de getallen $m, m, m, \ldots$ neer op de cirkel. Het product van drie getallen naast elkaar is nu altijd $m^3 = n$.

We conluderen dat er een stabiele plaatsing mogelijk is dan en slechts dan als n een drievoud of een derdemacht is. We moeten nu nog dit aantal tellen. De drievouden n met $3 \leq n \leq 2020$ zijn $3, 6, 9, \ldots, 2019$ en dat zijn er $\frac{2019}{3} = 673$. De derdemachten n met $3 \leq n \leq 2020$ zijn $2^3, 3^3, \ldots, 12^3$, want $12^3 = 1728 \leq 2020$ en $13^3 = 2197 > 2020$. Dit zijn 11 derdemachten, waarvan er 4 deelbaar zijn door 3, dus er zijn 7 derdemachten die geen drievoud zijn. Alles bij elkaar zijn er $673 + 7 = 680$ waarden van n die voldoen. $\square$

Opgave 2. In een scherphoekige driehoek ABC is D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A. Laat D_1 en D_2 de spiegelbeelden zijn van D in respectievelijk AB en AC. Het snijpunt van BC en de lijn door D_1 evenwijdig aan AB, noemen we E_1. Het snijpunt van BC en de lijn door D_2 evenwijdig aan AC, noemen we E_2. Bewijs dat D_1, D_2, E_1 en E_2 op een cirkel liggen waarvan het middelpunt op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ ligt.



Oplossing. Het midden van DD_1 noemen we K en het midden van DD_2 noemen we L. Dan ligt K op AB en L op AC. Wegens $\angle AKD = 90° = \angle ALD$ is $AKDL$ een koordenvierhoek. Dus $\angle DLK = \angle DAK = \angle DAB = 90° - \angle ABC$. Verder is KL een middenparallel in driehoek DD_1D_2, dus $\angle DLK = \angle DD_2D_1$. We concluderen dat $\angle DD_2D_1 = 90° - \angle ABC$.

Omdat $AC \perp DD_2$ en $D_2E_2 \parallel AC$, geldt $\angle DD_2E_2 = 90°$. Dus $\angle D_1D_2E_2 = \angle D_1D_2D + \angle DD_2E_2 = 90° - \angle ABC + 90° = 180° - \angle ABC$. Anderzijds geldt vanwege $D_1E_1 \parallel AB$ dat $\angle D_1E_1E_2 = \angle ABC$, dus we zien $\angle D_1D_2E_2 = 180° - \angle D_1E_1E_2$. We concluderen dat $D_1E_1E_2D_2$ een koordenvierhoek is.

Noem nu M het punt zodat AM een middellijn is van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Wegens Thales geldt dan $\angle ACM = 90°$. Dus $CM \perp AC$, waaruit volgt dat $CM \perp D_2E_2$ en $CM \parallel DD_2$. Verder is L het midden van DD_2 en geldt $LC \parallel D_2E_2$, dus LC is een middenparallel in driehoek DD_2E_2. Dit betekent dat C het midden van DE_2 is. Aangezien $CM \parallel DD_2$ volgt nu dat CM ook een middenparallel is, dus CM snijdt D_2E_2 middendoor. Omdat ook $CM \perp D_2E_2$, is CM de middelloodlijn van D_2E_2. Analoog geldt dat BM de middelloodlijn van D_1E_1 is. Dus M is het snijpunt van de middelloodlijnen van twee van de koorden van de cirkel door D_1, D_2, E_1 en E_2 en is daarmee het middelpunt van deze cirkel. $\square$

Opgave 3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x^2y) + 2f(y^2) = \big(x^2 + f(y)\big) \cdot f(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing I. Invullen van $x = 1$ geeft $f(y) + 2f(y^2) = (1 + f(y))f(y)$, dus

$$2f(y^2) = f(y)^2. \tag{1}$$

We kunnen hiermee in de oorspronkelijke functievergelijking de term $2f(y^2)$ links wegstrepen tegen $f(y)^2$ rechts:

$$f(x^2y) = x^2 f(y).$$

Invullen van $y = 1$ hierin geeft $f(x^2) = x^2 f(1)$ en invullen van $y = -1$ geeft $f(-x^2) = x^2 f(-1)$. Omdat x^2 alle niet-negatieve getallen aanneemt als $x \in \mathbb{R}$, geldt nu

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{als } x \geq 0, \\ dx & \text{als } x < 0, \end{cases}$$

met $c = f(1)$ en $d = -f(-1)$. Vul nu $y = 1$ in bij (1), dat geeft $2f(1) = f(1)^2$, dus $2c = c^2$. Hieruit volgt $c = 0$ of $c = 2$. Vullen we juist $y = -1$ in bij (1), dan vinden we $2f(1) = f(-1)^2$, dus $2c = (-d)^2$. Voor $c = 0$ geeft dit $d = 0$ en voor $c = 2$ geeft dit $d = 2$ of $d = -2$. We hebben dus drie gevallen:

- $c = 0$, $d = 0$: dan is $f(x) = 0$ voor alle x;
- $c = 2$, $d = 2$: dan is $f(x) = 2x$ voor alle x;
- $c = 2$, $d = -2$: dan is $f(x) = 2x$ voor $x \geq 0$ en $f(x) = -2x$ voor $x < 0$, oftewel $f(x) = 2|x|$ voor alle x.

Met de eerste functie komt er in de functievergelijking links en rechts 0, dus deze voldoet. Met de tweede functie komt er in de functievergelijking links $2x^2y + 4y^2$ en rechts $(x^2 + 2y) \cdot 2y = 2x^2y + 4y^2$, dus die functie voldoet. Met de derde functie komt er links $2|x^2y| + 4|y^2| = 2x^2|y| + 4y^2$ en rechts $(x^2 + 2|y|) \cdot 2|y| = 2x^2|y| + 4|y|^2 = 2x^2|y| + 4y^2$, dus die functie voldoet ook.

Al met al hebben we drie oplossingen gevonden: $f(x) = 0$, $f(x) = 2x$ en $f(x) = 2|x|$. $\square$

Oplossing II. Invullen van $y = 0$ geeft $f(0) + 2f(0) = (x^2 + f(0))f(0)$. Dus $f(0) = 0$ of $3 = x^2 + f(0)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dat laatste kan niet waar zijn, dus $f(0) = 0$.

Vul nu in $x = 0$, $y = 1$. Dan krijgen we $f(0) + 2f(1) = f(1)^2$, dus $2f(1) = f(1)^2$, dus $f(1) = 0$ of $f(1) = 2$. Vervolgens geeft $y = 1$ dat $f(x^2) + 2f(1) = \big(x^2 + f(1)\big) \cdot f(1)$, wat met de twee mogelijke waarden van $f(1)$ oplevert:

$$f(x^2) = \begin{cases} 0 & \text{als } f(1) = 0, \\ 2x^2 & \text{als } f(1) = 2. \end{cases}$$

Omdat x^2 alle niet-negatieve getallen aanneemt als $x \in \mathbb{R}$, zijn nu de functiewaarden van alle niet-negatieve getallen bepaald. Merk op dat de term $2f(y^2)$ in de functievergelijking nu ook voor alle y uitgerekend kan worden.

Bekijk nu eerst het geval dat $f(1) = 0$. Er geldt dus $f(x) = 0$ voor alle $x \geq 0$. Vul $x = 1$ in, dat geeft $f(y) + 0 = (1 + f(y))f(y)$, dus $0 = f(y)^2$, dus $f(y) = 0$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. De functie $f(x) = 0$ voor alle x voldoet inderdaad aan de functievergelijking en is dus een oplossing.

Bekijk nu het geval dat $f(1) = 2$. Er geldt dus $f(x) = 2x$ voor alle $x \geq 0$. Vul $x = 1$ in, dat geeft $f(y) + 4y^2 = (1 + f(y))f(y)$, dus $4y^2 = f(y)^2$. We vinden nu voor alle y dat $f(y) = 2y$ of $f(y) = -2y$. Voor $y \geq 0$ weten we al dat altijd het eerste geldt. We willen nu uitsluiten dat voor $y < 0$ allebei de mogelijkheden voorkomen. Neem dus een $a, b < 0$ met $a \neq b$ zodat $f(a) = 2a$ en $f(b) = -2b$. Kies $y = b$ en $x^2 = \frac{a}{b}$, wat kan omdat $\frac{a}{b} > 0$. Dan geldt $x^2 y = a$, dus invullen in de functievergelijking geeft

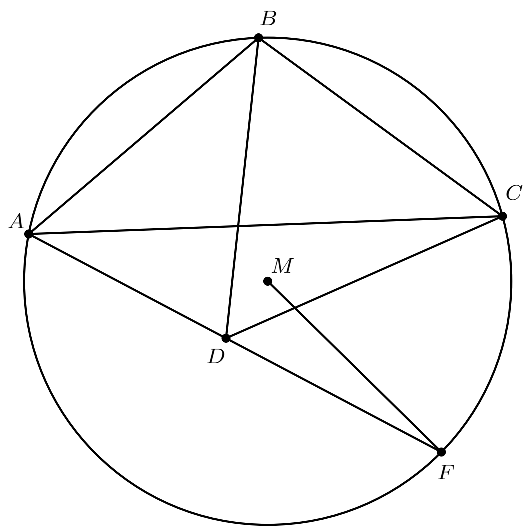
$$2a + 2f(b^2) = \left(\frac{a}{b} - 2b\right) \cdot -2b,$$

oftewel $2f(b^2) = -4a + 4b^2$. We weten dat $f(b^2)$ gelijk is aan $2b^2$, want $f(x) = 2x$ voor $x \geq 0$. Dus $4b^2 = -4a + 4b^2$, oftewel $-4a = 0$, tegenspraak met $a < 0$. We concluderen dat ofwel voor alle $y < 0$ geldt dat $f(y) = 2y$, ofwel voor alle $y < 0$ geldt dat $f(y) = -2y$.

Dat geeft nog twee mogelijke functies: $f(x) = 2x$ voor alle x en $f(x) = 2|x|$ voor alle x. Met de eerste functie komt er in de functievergelijking links $2x^2y + 4y^2$ en rechts $(x^2 + 2y) \cdot 2y = 2x^2y + 4y^2$, dus die functie voldoet. Met de tweede functie komt er links $2|x^2y| + 4|y^2| = 2x^2|y| + 4y^2$ en rechts $(x^2 + 2|y|) \cdot 2|y| = 2x^2|y| + 4|y|^2 = 2x^2|y| + 4y^2$, dus die functie voldoet ook.

Al met al hebben we drie oplossingen gevonden: $f(x) = 0$, $f(x) = 2x$ en $f(x) = 2|x|$. $\square$

Opgave 4. Op een cirkel met middelpunt M liggen drie verschillende punten A, B en C zodat $|AB| = |BC|$. Punt D ligt binnen de cirkel op zo'n manier dat $\triangle BCD$ gelijkzijdig is. Het tweede snijpunt van AD met de cirkel noemen we F. Bewijs dat $|FD| = |FM|$.



Oplossing. We gaan bewijzen dat $|FD| = |FC|$ en dat $|FC| = |FM|$, waaruit het gevraagde volgt.

In koordenvierhoek $ABCF$ is $\angle BCF = 180° - \angle BAF$. Wegens $|AB| = |BC| = |BD|$ geldt verder $\angle BAF = \angle BAD = \angle ADB$, dus $\angle BDF = 180° - \angle ADB = 180° - \angle BAF$. We zien dat $\angle BCF = \angle BDF$. Verder zijn $\angle DFB = \angle AFB$ en $\angle CFB$ omtrekshoeken op de gelijke koorden AB en BC, dus $\angle DFB = \angle CFB$. Driehoeken BCF en BDF hebben dus twee paren hoeken gelijk; omdat ze ook nog zijde BF gemeenschappelijk hebben, zijn ze congruent wegens ZHH. We concluderen dat $|FC| = |FD|$ en dat $\angle DBF = \angle CBF$.

Vanwege de middelpunt-omtrekhoekstelling geldt $\angle CMF = 2\angle CBF$. Uit de zojuist gevonden gelijkheid $\angle DBF = \angle CBF$ volgt dat $2\angle CBF = \angle CBD = 60°$, dus $\angle CMF = 60°$. Verder is $|MC| = |MF|$ (straal van de cirkel) dus $\triangle CMF$ is gelijkbenig met een tophoek van $60°$, waaruit volgt dat hij gelijkzijdig is. Dit betekent dat $|FC| = |FM|$.

Hiermee hebben we bewezen dat $|FD| = |FC| = |FM|$. $\square$

Opgave 5. Een verzameling S die bestaat uit 2019 (verschillende) positieve gehele getallen heeft de volgende eigenschap: het product van elke 100 elementen van S is een deler van het product van de overige 1919 elementen. Wat is het maximale aantal priemgetallen dat S kan bevatten?

Oplossing. Het maximale aantal priemgetallen is 1819.

We beginnen met de constructie. Kies verschillende priemgetallen p_1, p_2, ..., p_{1819} en zij $P = p_1p_2 \cdots p_{1819}$. Neem

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_{1819}, P, P \cdot p_1, \dots, P \cdot p_{199}\}.$$

Voor elke p_i geldt dat er 201 getallen in S zijn die deelbaar zijn door p_i (namelijk p_i en alle getallen deelbaar door P). Hiervan is er hoogstens één getal met twee factoren p_i; de rest heeft één factor p_i. Nemen we nu 100 getallen uit S, dan zitten in hun product hoogstens 101 factoren p_i. Bij de overige getallen zitten nog minstens 101 getallen deelbaar door p_i, dus hun product heeft minstens 101 factoren p_i. Omdat dit voor elke p_i geldt en de getallen uit S geen andere priemfactoren hebben, betekent dit dat S de gewenste eigenschap heeft.

We bewijzen nu dat S niet meer dan 1819 priemgetallen kan bevatten. Bekijk een priemdeler q van een getal in S. Stel dat hooguit 199 getallen in S deelbaar zijn door q. Dan nemen we de 100 elementen van S met de meeste factoren q erin; die hebben samen altijd meer factoren q dan de overige elemenenten, tegenspraak met de voorwaarde in de opgave. Dus er zijn minstens 200 getallen in S deelbaar door q. Als het er precies 200 zijn, volgt bovendien dat het aantal priemfactoren q in al deze getallen gelijk moet zijn, anders krijgen we weer een tegenspraak als we de 100 elementen met de meeste factoren p kiezen.

We zien nu dat S minstens 199 niet-priemgetallen moet bevatten, want een priemgetal p in S deelt nog minstens 199 andere elementen van S. Stel nu dat S precies 199 niet-priemgetallen bevat. Dan komt de priemfactor p in elk van deze 199 niet-priemgetallen precies één keer voor (namelijk net zo vaak als in het priemgetal p). Verder kunnen getallen in S nu niet deelbaar zijn door een priemgetal r dat zelf niet in S zit, want dan moeten er wel in totaal minstens 200 veelvouden van r in S zitten en dat zijn dan 200 niet-priemgetallen, tegenspraak. Hieruit volgt dat elk van de 199 niet-priemgetallen in S het product moet zijn van de priemgetallen in S en in het bijzonder zijn deze 199 getallen dus niet verschillend van elkaar. Dit is een tegenspraak, dus S moet minstens 200 niet-priemgetallen bevatten en daarmee hoogstens 1819 priemgetallen. $\square$