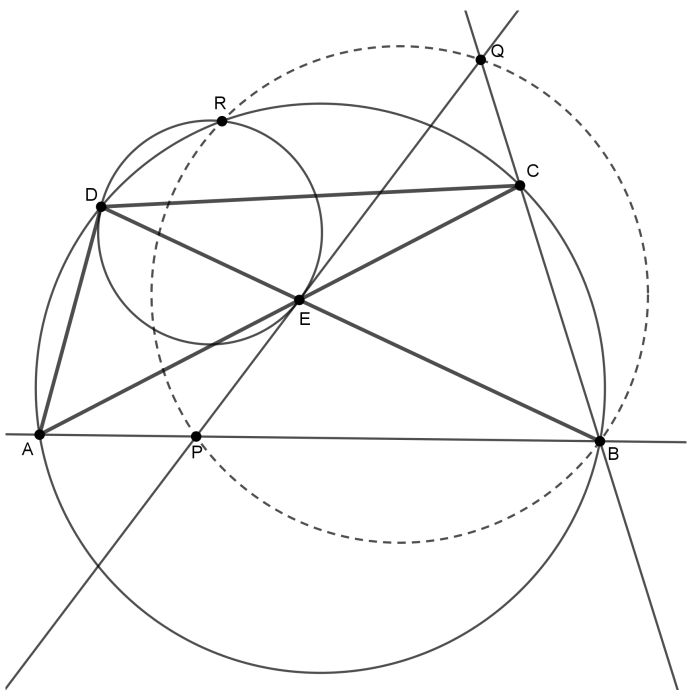
IMO-selectietoets III

vrijdag 31 mei 2019

Uitwerkingen

Opgave 1. In koordenvierhoek $ABCD$ is E het snijpunt van de diagonalen. Een lijn door E, ongelijk aan AC of BD, snijdt AB in P en BC in Q. De cirkel die raakt aan PQ in E en verder door D gaat, snijdt de omgeschreven cirkel van $ABCD$ nogmaals in punt R. Bewijs dat B, P, R en Q op een cirkel liggen.



We bekijken de configuratie waar P inwendig op AB ligt en Q uitwendig op BC; andere configuraties gaan analoog.

Oplossing I. Vanwege koordenvierhoek $DBCR$ geldt $\angle QCR = 180° - \angle BCR = \angle BDR$. Omdat EQ raakt aan de cirkel door E, D en R geldt $\angle BDR = \angle EDR = \angle QER$, dus $\angle QCR = \angle QER$. Dit betekent dat $ERQC$ een koordenvierhoek is. Analoog is ook $EPAR$ een koordenvierhoek.

We vinden nu $\angle PRQ = \angle PRE + \angle ERQ = \angle PAE + 180° - \angle ECQ = \angle BAE + \angle ECB$. Vanwege de hoekensom in $\triangle ABC$ is dit gelijk aan $180° - \angle ABC = 180° - \angle PBQ$. Dus $\angle PRQ = 180° - \angle PBQ$ en daaruit volgt dat $BPRQ$ een koordenvierhoek is. $\square$

Oplossing II. Analoog aan oplossing I bewijzen we dat $EPAR$ een koordenvierhoek is. (In deze oplossing hebben we koordenvierhoek $ERQC$ niet nodig.) We vinden nu $\angle BRP = \angle BRA - \angle PRA = \angle BCA - \angle PEA = (180^\circ - \angle QCE) - (180^\circ - \angle QEA) = \angle QEA - \angle QCE$. Vanwege de buitenhoekstelling in driehoek QCE is dit gelijk aan $\angle EQC = \angle PQB$. Dus $\angle BRP = \angle PQB$, waaruit volgt dat $BPRQ$ een koordenvierhoek is. $\square$

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. Bewijs dat $n^2 + n + 1$ niet te schrijven is als het product van twee positieve gehele getallen die minder dan $2\sqrt{n}$ van elkaar verschillen.

Oplossing I. Stel dat a en b positieve gehele getallen zijn met $ab = n^2 + n + 1$. We gaan bewijzen dat $|a-b| \geq 2\sqrt{n}$. Merk op dat $(a-b)^2 \geq 0$. Aan beide kanten $4ab$ optellen geeft

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \geq 4ab = 4n^2 + 4n + 4 > 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

Omdat $(a+b)^2$ een kwadraat is, geldt $(a+b)^2 \geq (2n+2)^2$. Dan volgt

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \geq (2n+2)^2 - 4(n^2+n+1) = 4n$$

dus $|a-b| \geq 2\sqrt{n}$. $\square$

Oplossing II. Stel dat n^2+n+1 het product van twee positieve gehele getallen is en noem de kleinste $n-a$ met a geheel. Omdat $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + n + 1$, is $n - a \leq n$, dus $a \geq 0$. Nu geldt $(n-a)(n+a+1) = n^2 + n - a(a+1) < n^2 + n + 1$, dus dit product is te klein; de tweede factor is daarom minstens $n + a + 2$. Als $n > (a+1)^2$ geldt

$$(n-a)(n+a+2) = n^2 + 2n - a(a+2) > n^2 + n + (a+1)^2 - a(a+2)$$

$$= n^2 + n + a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a = n^2 + n + 1,$$

dus dit product is al te groot, tegenspraak. Er geldt dus $n \leq (a+1)^2$, wat te schrijven is als $a + 1 \geq \sqrt{n}$. Het verschil tussen de twee factoren is dan minstens

$$(n+a+2) - (n-a) = 2a + 2 \geq 2\sqrt{n}.$$

Oplossing III. Stel dat a en b positieve gehele getallen zijn met $ab = n^2+n+1$. We gaan bewijzen dat $|a-b| \geq 2\sqrt{n}$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat b de kleinste is. Omdat $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + n + 1$, is $b \leq n$. Schrijf $b = n + 1 - c$ met $c \geq 1$ geheel. Modulo b geldt nu $n \equiv c - 1$. Dus

$$n^2 + n + 1 \equiv (c-1)^2 + (c-1) + 1 = c^2 - 2c + 1 + c - 1 + 1 = c^2 - c + 1 \mod b.$$

Anderzijds is b een deler van n^2+n+1, dus geldt $n^2+n+1 \equiv 0 \mod b$. Dus $c^2 - c \equiv -1 \mod b$. Maar de linkerkant is niet-negatief want $c \geq 1$, dus het is minstens gelijk aan $-1 + b = -1 + (n+1-c) = n - c$. Dus $c^2 - c \geq n - c$, waaruit volgt dat $c^2 \geq n$, dus $c \geq \sqrt{n}$.
Merk nu op dat $n^2+n+1 = (n-\sqrt{n}+1)(n+\sqrt{n}+1)$. We weten nu $b = n+1-c \leq n-\sqrt{n}+1$, dus $a \geq n + \sqrt{n} + 1$. Het verschil tussen de twee factoren is daarom minstens $2\sqrt{n}$. $\square$

Opgave 3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

(i) voor alle gehele getallen x geldt $f(f(x)) = x$;

(ii) voor alle gehele getallen x en y zodat $x+y$ oneven is geldt er dat $f(x)+f(y) \geq x+y$.

Oplossing. De functie $f(x) = x$ voor alle x voldoet. Neem nu verder aan dat niet voor alle x geldt $f(x) = x$. Vanwege (i) is er dan zowel een waarde van x met $f(x) > x$ als een waarde van x met $f(x) < x$. We nemen nu een $a \in \mathbb{Z}$ met $f(a) < a$ en bekijken een willekeurige x met $x \not\equiv a \mod 2$. Er geldt dat $f(x) + f(a) \geq x + a$, dus $f(x) \geq x + a - f(a) > x$. Schrijf $w = f(x)$, dan geldt $f(w) = f(f(x)) = x < f(x) = w$. Als $w \not\equiv a \mod 2$, zou juist $f(w) > w$, tegenspraak. Dus $f(x) = w \equiv a \mod 2$ en dus ook $f(x) \not\equiv x$.
Neem nu een x_1 en een x_2 die beide niet dezelfde pariteit als a hebben. Dan hebben ze beide ook niet dezelfde pariteit als hun functiewaarden, dus $x_1 + f(x_2)$ en $x_2 + f(x_1)$ zijn oneven. Door $x = x_1$, $y = f(x_2)$ en ook $x = x_2$, $y = f(x_1)$ in te vullen, zien we dat

$$f(x_1) + x_2 = f(x_1) + f(f(x_2)) \geq x_1 + f(x_2) = f(f(x_1)) + f(x_2) \geq f(x_1) + x_1.$$

Er moet nu overal gelijkheid gelden, dus $f(x_1) + x_2 = x_1 + f(x_2)$. Fixeer x_1 en schrijf $c = f(x_1) - x_1$, dan geldt $f(x_2) = x_2 + c$ voor alle x_2 die niet dezelfde pariteit hebben als a. We weten verder dat c oneven is. Schrijf $z = x_2 + c$, dan kan z alle mogelijke waarden aannemen die niet dezelfde pariteit hebben als x_2 en dus wel dezelfde als a. Er geldt

$$f(z) = f(x_2 + c) = f(f(x_2)) = x_2 = z - c.$$

Schrijf nu $d = c$ als a oneven en $d = -c$ als a even, dan voldoet de functie aan

$$f(x) = \begin{cases} x + d & \text{als } x \text{ even,} \\ x - d & \text{als } x \text{ oneven.} \end{cases}$$

We controleren nu functies van deze vorm voor een willekeurige oneven d. We zien dat $f(x)$ en x nooit dezelfde pariteit hebben, dus $f(f(x)) = x + d - d = x$, waarmee aan (i) voldaan wordt. Verder geldt als $x+y$ oneven is dat x en y verschillende pariteiten hebben, dus $f(x) + f(y) = x + y + d - d = x + y \geq x + y$, waarmee ook aan (ii) voldaan wordt.
We concluderen dat de functies van deze vorm samen met de functie $f(x) = x$ voor alle x de oplossingen zijn. $\square$

Opgave 4. Aan een wiskundewedstrijd doen 300 deelnemers mee. Na de wedstrijd spelen sommige deelnemers wat potjes schaak. Elke twee deelnemers spelen hooguit één keer tegen elkaar. Er zijn geen drie deelnemers bij deze wedstrijd die onderling allemaal tegen elkaar schaken. Bepaal de maximale n waarvoor het mogelijk is dat aan de volgende voorwaarden tegelijk voldaan wordt: elke deelnemer speelt hooguit n potjes schaak, en voor elke m met $1 \leq m \leq n$ is er een deelnemer die precies m potjes schaak speelt.

Oplossing. We laten zien dat n maximaal 200 is. We geven eerst een voorbeeld waarin $n = 200$ geldt. Bekijk spelers $A_1, A_2, \ldots, A_{200}$ en $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$. Dit zijn 300 spelers in totaal. Laat B_i schaak spelen tegen de spelers A_j met $1 \leq j \leq i + 100$, terwijl verder geen andere deelnemers tegen elkaar schaken. Dan schaakt B_i tegen precies $100 + i$ andere deelnemers, dus voor $101 \leq m \leq 200$ is er een deelnemer die precies m potjes schaak speelt. Verder schaakt A_j voor $j > 100$ tegen de deelnemers B_i met $i \geq j - 100$; dat zijn er $100 - (j - 101) = 201 - j$. Omdat j hier kan variëren van 101 tot en met 200, varieert dit getal van 100 tot en met 1. Voor $1 \leq m \leq 100$ is er dus ook een deelnemer die precies m potjes schaak speelt. Ten slotte schaakt A_j voor $j \leq 100$ tegen alle B_i; dat zijn er 100. Er zijn dus geen deelnemers die meer dan 200 potjes schaak spelen. We zien dat dit voorbeeld aan de eisen voldoet voor $n = 200$.
Nu bewijzen we dat $n > 200$ niet kan. Dit doen we uit het ongerijmde, dus stel dat $n > 200$. Dan is er in elk geval een deelnemer A die precies 201 potjes schaak speelt, tegen spelers $B_1, B_2, \ldots, B_{201}$. Er zijn in totaal 300 deelnemers, dus naast hen en A zijn er nog $300 - 1 - 201 = 98$ andere deelnemers, die we $C_1, \ldots, C_{98}$ noemen. Als een deelnemer B_i schaakt tegen een andere deelnemer B_j, vormen zij samen met A een drietal dat onderling drie potjes schaakt; dat mag niet. Dus B_i schaakt niet tegen een andere deelnemer B_j. Hij speelt dus hooguit $1 + 98 = 99$ potjes schaak. Dat betekent dat de deelnemers die tegen precies m andere deelnemers schaken met $100 \leq m \leq 200$ allemaal onder de deelnemers C_i te vinden moeten zijn. Echter, dat zijn maar 98 verschillende mensen, tegenspraak. We concluderen dat $n > 200$ niet kan en dat dus $n = 200$ maximaal is. $\square$