Selectietoets

vrijdag 22 maart 2019

Uitwerkingen

Opgave 1. Bewijs dat er voor elke positieve gehele n hoogstens twee paren (a, b) van positieve gehele getallen bestaan met de volgende twee eigenschappen:

(i) $a^2 + b = n$,

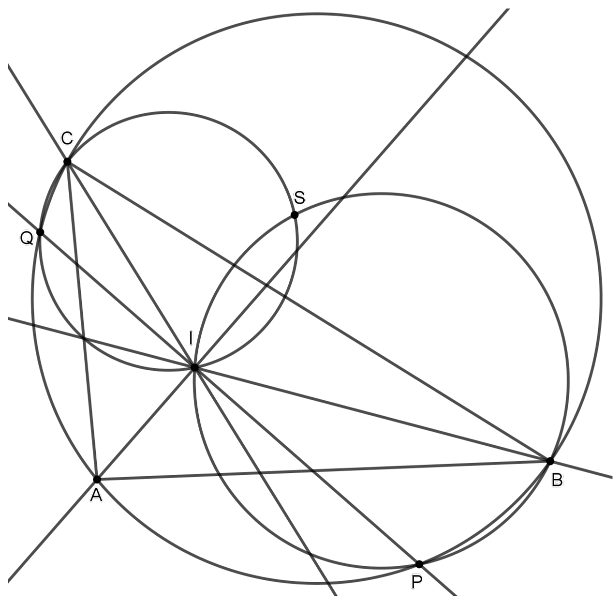
(ii) $a + b$ is een tweemacht, d.w.z. er is een gehele $k \geq 0$ met $a + b = 2^k$.

Oplossing. Stel dat er drie of meer zulke paren bestaan bij dezelfde n. Dan zijn er wegens het ladenprincipe minstens twee, zeg (a, b) en (c, d), zodat $a \equiv c \mod 2$. Schrijf $a+b = 2^k$ en $c + d = 2^\ell$ met k en ℓ positieve gehele getallen. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $\ell \geq k$. We zien dat

$$\begin{aligned} 2^\ell - 2^k &= (c + d) - (a + b) \\ &= (c + n - c^2) - (a + n - a^2) = c - a - c^2 + a^2 = (a + c - 1)(a - c). \end{aligned}$$

Omdat $\ell \geq k$ is 2^k een deler van $2^\ell - 2^k$. Omdat $a \equiv c \mod 2$, is $a + c - 1$ oneven, dus moet 2^k een deler zijn van $a - c$. Omdat $2^\ell - 2^k \geq 0$ en $a + c - 1 > 0$ is $a - c \geq 0$. Anderzijds geldt $a - c < a + b = 2^k$, dus $0 \leq a - c < 2^k$, terwijl $2^k \mid a - c$. We concluderen dat $a - c = 0$, dus $a = c$. Nu geldt $b = n - a^2 = n - c^2 = d$, dus de paren (a, b) en (c, d) zijn identiek. Tegenspraak. Er zijn dus hoogstens twee paren (a, b) die voldoen. $\square$

Opgave 2. Zij ABC een driehoek en zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van deze driehoek. De lijn door I loodrecht op AI snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ in de punten P en Q, waarbij P aan dezelfde kant van AI ligt als B. Zij S het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van $\triangle BIP$ en $\triangle CIQ$. Bewijs dat SI de bissectrice van $\angle PSQ$ is.



We bekijken de configuratie waarin S en A aan verschillende kanten van PQ liggen. De configuratie waarin S en A aan dezelfde kant van PQ liggen, gaat analoog.

Oplossing I. Laat M en N de snijpunten zijn van respectievelijk BI en CI met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Schrijf verder $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ en $\angle BCA = 2\gamma$. Dan geldt vanwege de omtrekshoekstelling

$$\angle AMN = \angle ACN = \angle ACI = \gamma$$

en

$$\angle MAC = \angle MBC = \angle IBC = \beta,$$

zodat

$$\angle AMN + \angle MAI = \gamma + \angle MAC + \angle CAI = \gamma + \beta + \alpha = 90^\circ.$$

Hieruit volgt dat $MN \perp AI$. Aangezien gegeven is dat ook $PQ \perp AI$, geldt $MN \parallel PQ$. Koordenvierhoek $MNPQ$ is dus een gelijkbenig trapezium en daarin zijn de diagonalen even lang, dus $|MP| = |NQ|$. Hieruit volgt $\angle PBM = \angle NCQ$. Met nog twee keer omtrekshoekstelling vinden we nu

$$\angle PSI = \angle PBI = \angle PBM = \angle NCQ = \angle ICQ = \angle ISQ.$$

We concluderen dat SI de bissectrice van $\angle PSQ$ is. $\square$

Oplossing II. Schrijf $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ en $\angle BCA = 2\gamma$. Er geldt vanwege de hoekensom in $\triangle AIB$ dat

$$\angle BIA = 180^\circ - \angle IAB - \angle ABI = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + \gamma,$$

dus

$$\angle BIP = \angle BIA - \angle AIP = 90^\circ + \gamma - 90^\circ = \gamma = \angle BCI.$$

Verder geldt met behulp van de koordenvierhoekstelling

$$180^\circ - \angle BPI = 180^\circ - \angle BPQ = \angle BCQ = \angle BCI + \angle ICQ.$$

Als we nu de hoekensom in driehoek BPI bekijken en beide resultaten hierboven gebruiken, vinden we

$$\angle PBI = 180^\circ - \angle BPI - \angle BIP = \angle BCI + \angle ICQ - \angle BCI = \angle ICQ.$$

Met nog twee keer omtrekshoekstelling volgt nu

$$\angle PSI = \angle PBI = \angle ICQ = \angle ISQ,$$

dus SI is de bissectrice van hoek PSQ. $\square$

Opgave 3. Laat x en y positieve reële getallen zijn.

a) Bewijs: als $x^3 - y^3 \geq 4x$, dan geldt $x^2 > 2y$.

b) Bewijs: als $x^5 - y^3 \geq 2x$, dan geldt $x^3 \geq 2y$.

Oplossing.

a) Er geldt $x^3 - 4x \geq y^3 > 0$, dus $x(x^2 - 4) > 0$. Omdat x positief is, volgt hieruit dat $x^2 - 4 > 0$, dus $x^2 > 4$. Dat betekent $x > 2$. Verder geldt $x^3 - y^3 \geq 4x > 0$, dus $x > y$. Combineren van deze twee resultaten (wat mag omdat x en y beide positief zijn) geeft $x^2 = x \cdot x > 2 \cdot y = 2y$.

b) Er geldt $(x^4 - 4)^2 \geq 0$. Uitwerken geeft $x^8 - 8x^4 + 16 \geq 0$. Omdat x positief is, kunnen we dit met x vermenigvuldigen zonder dat het teken omklapt, dus geldt ook $x^9 \geq 8x^5 - 16x$. Uit de gegeven ongelijkheid volgt $x^5 - 2x \geq y^3$. Als we dat combineren met het voorgaande, krijgen we $x^9 \geq 8(x^5 - 2x) \geq 8y^3$. Hieruit volgt $x^3 \geq 2y$.

$\square$

Opgave 4. Bestaan er een positief geheel getal k en een niet-constante rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van positieve gehele getallen zodat $a_n = \text{ggd}(a_{n+k}, a_{n+k+1})$ voor alle positieve gehele getallen n?

Oplossing I. Zo'n k en bijbehorende rij bestaan niet. We bewijzen dit uit het ongerijmde, dus stel dat ze wel bestaan. Merk op dat $a_n \mid a_{n+k}$ en $a_n \mid a_{n+k+1}$ voor alle $n \geq 1$. Met een eenvoudige inductie volgt ook dat $a_n \mid a_{n+\ell k}$ en $a_n \mid a_{n+\ell k+\ell}$ voor alle $l \geq 0$. We bewijzen nu met inductie naar m dat $a_n \mid a_{n+mk+(m+1)}$ voor alle $0 \leq m \leq k-1$. Voor $m = k-1$ volgt dit uit $a_n \mid a_{n+k\cdot k} = a_{n+(k-1)k+k}$. Stel nu dat voor zekere m met $1 \leq m \leq k-1$ geldt dat $a_n \mid a_{n+mk+(m+1)}$. We weten ook dat $a_n \mid a_{n+mk+m}$, dus vanwege $a_{n+(m-1)k+m} = \text{ggd}(a_{n+mk+m}, a_{n+mk+m+1})$ geldt ook $a_n \mid a_{n+(m-1)k+m}$. Dit voltooit de inductiestap. Invulen van $m = 0$ geeft nu $a_n \mid a_{n+1}$.
Omdat $a_n \mid a_{n+1}$, geldt ook $\text{ggd}(a_n, a_{n+1}) = a_n$ voor alle n. Dus $a_n = a_{n-k}$ voor alle $n \geq k+1$. We hebben nu $a_{n-k} \mid a_{n-k+1} \mid a_{n-k+2} \mid \ldots \mid a_n = a_{n-k}$. Omdat het om allemaal positieve gehele getallen gaat, moeten a_{n-k}, a_{n-k+1}, $\ldots$, a_n allemaal gelijk zijn. Dit geldt voor alle $n \geq k+1$, dus de rij is constant. Tegenspraak. $\square$

Oplossing II. Zo'n k en bijbehorende rij bestaan niet. We bewijzen dit uit het ongerijmde, dus stel dat ze wel bestaan. Merk op dat $a_n \mid a_{n+k}$ en $a_n \mid a_{n+k+1}$ voor alle $n \geq 1$. Zij nu $0 \leq \ell \leq k$ een geheel getal. Dan geldt $k^2 + \ell = (k-\ell) \cdot k + \ell \cdot (k+1)$. Door de eerste deelbaarheid $k - \ell$ keer toe te passen en vervolgens de tweede ℓ keer, vinden we hiermee dat $a_n \mid a_{n+k^2+\ell}$. Er geldt dus $a_n \mid a_{n+k^2+\ell}$ voor alle $0 \leq \ell \leq k$.
We bewijzen nu dat als $a_n \mid a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k}$, dat dan ook $a_n \mid a_{i-1}$. Er geldt $a_{i-1} = \text{ggd}(a_{i+k-1}, a_{i+k})$. Omdat a_n ook een gemeenschappelijke deler van a_{i+k-1} en a_{i+k} is, moet er gelden dat $a_n \mid a_{i-1}$.
We weten $a_n \mid a_{n+k^2}$, a_{n+k^2+1}, $\ldots$, a_{n+k^2+k}, dus door het bovenstaande toe te passen, vinden we $a_n \mid a_{n+k^2-1}$. Met inductie krijgen we nu $a_n \mid a_{n+k^2-m}$ voor alle $m < n + k^2$. In het bijzonder vinden we $a_n \mid a_{n+1}$ voor alle n, maar ook $a_n \mid a_{n-1}$ voor alle $n \geq 2$. Dus geldt voor alle positieve gehele j zowel $a_j \mid a_{j+1}$ als $a_{j+1} \mid a_j$. Er geldt dus $a_j = a_{j+1}$ voor alle j, dus de rij is constant. Tegenspraak. $\square$

Opgave 5. In een land zijn 2018 steden, waarvan sommige met elkaar verbonden zijn door wegen. Elke stad is verbonden met ten minste drie andere steden. Het is mogelijk om van elke willekeurige stad naar elke andere willekeurige stad te reizen via één of meer wegen. Bekijk voor elk tweetal steden de kortste route tussen deze twee steden. Wat is het grootste aantal wegen dat in zo'n kortste route zou kunnen voorkomen?

Oplossing. Het grootste aantal wegen dat in een kortste route kan voorkomen, is 1511. We geven eerst een land waarvoor dit aantal aangenomen wordt. Deel de steden op in 504 groepen: twee groepen van vijf steden $(A_0, B_0, C_0, D_0, E_0)$ en $(A_{503}, B_{503}, C_{503}, D_{503}, E_{503})$ en verder groepen van vier steden (A_i, B_i, C_i, D_i) voor $1 \leq i \leq 502$. Voor alle i met $0 \leq i \leq 503$: verbind A_i met B_i, verbind A_i met C_i, verbind B_i met D_i en verbind C_i met D_i. Verbind verder E_0 met A_0, B_0 en C_0. Verbind E_{503} met B_{503}, C_{503} en D_{503}. Voor $1 \leq i \leq 502$: verbind B_i met C_i. Ten slotte voor $0 \leq i \leq 502$: verbind D_i met A_{i+1}. Nu is elke stad met precies drie andere steden verbonden.
Als we nu van A_0 naar D_{503} willen, dan moet dat via alle A_i en D_i, omdat daar de enige verbindingen tussen de verschillende groepen lopen en elke groep alleen verbonden is met de vorige en volgende groep. Verder is voor $0 \leq i \leq 503$ de stad A_i niet verbonden met D_i, dus de route binnen groep i moet via B_i of C_i lopen. Minstens drie van de vier of vijf steden in zo'n groep worden dus aangedaan op de route. In totaal bevat de route dus minstens $3 \cdot 504 = 1512$ steden en daarmee minstens 1511 wegen.
We laten vervolgens zien dat een kortste route tussen twee steden nooit meer dan 1511 wegen kan doorlopen. Bekijk zo'n korste route waarbij achtereenvolgens de steden A_0, A_1, $\ldots$, A_k worden aangedaan. Elk van de steden A_i is behalve met zijn buren A_{i-1} en A_{i+1} nog met minstens één andere stad verbonden, zeg met B_i (hierbij hoeven B_0, B_1, $\ldots$, B_k niet allemaal verschillende steden te zijn). Verder zijn A_0 en A_k nog met een derde stad verbonden, zeg $C_0 \neq B_0$ en $C_k \neq B_k$. Als één van de steden B_i of C_i gelijk is aan één van de steden A_j, dan hadden we een kortere route kunnen vinden door direct van A_i naar A_j te lopen (of andersom), tegenspraak. Dus de steden B_i en C_i zijn allemaal ongelijk aan alle steden A_j.
Als één van de steden B_i in totaal met vier steden A_j verbonden is, zeg B_i is verbonden met A_i, A_m, A_n en A_p met $i < m < n < p$, dan zouden we de route kunnen inkorten door van A_i naar B_i en dan naar A_p te lopen. We slaan dan minimaal twee steden uit de oorspronkelijke route over (namelijk A_m en A_n) en bezoeken in plaats daarvan alleen B_i extra, dus deze nieuwe route is korter. Tegenspraak. De steden B_i met $3 \leq i \leq k-3$ zijn dus minstens $\frac{k-5}{3}$ verschillende steden. Voor B_0 en C_0 geldt dat we de route kunnen inkorten als één van deze steden gelijk is aan B_i met $i \geq 3$. Dat zou een tegenspraak zijn, dus B_0 en C_0 zijn twee verschillende steden ongelijk aan B_i met $i \geq 3$. Zo ook zijn B_k en C_k twee verschillende steden ongelijk aan B_i met $i \leq k-3$. Al met al hebben we op de route zelf $k+1$ steden en daarnaast nog minstens $\frac{k-5}{3} + 2 + 2$ andere steden. Dus $\frac{k-5}{3} + k + 5 \leq 2018$, dus $4k - 5 + 15 \leq 3 \cdot 2018 = 6054$, dus $4k \leq 6044$, dus $k \leq 1511$.
We concluderen dat het grootst mogelijke aantal wegen in een kortste route gelijk aan 1511.
$\square$