NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Selectietoets

vrijdag 22 maart 2019

Opgave 1. Bewijs dat er voor elke positieve gehele n hoogstens twee paren (a, b) van positieve gehele getallen bestaan met de volgende twee eigenschappen:

(i) $a^2 + b = n$,

(ii) $a + b$ is een tweemacht, d.w.z. er is een gehele $k \geq 0$ met $a + b = 2^k$.

Opgave 2. Zij ABC een driehoek en zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van deze driehoek. De lijn door I loodrecht op AI snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ in de punten P en Q, waarbij P aan dezelfde kant van AI ligt als B. Zij S het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van $\triangle BIP$ en $\triangle CIQ$. Bewijs dat SI de bissectrice van $\angle PSQ$ is.

Opgave 3. Laat x en y positieve reële getallen zijn.

a) Bewijs: als $x^3 - y^3 \geq 4x$, dan geldt $x^2 > 2y$.

b) Bewijs: als $x^5 - y^3 \geq 2x$, dan geldt $x^3 \geq 2y$.

Opgave 4. Bestaan er een positief geheel getal k en een niet-constante rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van positieve gehele getallen zodat $a_n = \text{ggd}(a_{n+k}, a_{n+k+1})$ voor alle positieve gehele getallen n?

Opgave 5. In een land zijn 2018 steden, waarvan sommige met elkaar verbonden zijn door wegen. Elke stad is verbonden met ten minste drie andere steden. Het is mogelijk om van elke willekeurige stad naar elke andere willekeurige stad te reizen via één of meer wegen. Bekijk voor elk tweetal steden de kortste route tussen deze twee steden. Wat is het grootste aantal wegen dat in zo'n kortste route zou kunnen voorkomen?