IMO-selectietoets I

donderdag 7 juni 2018

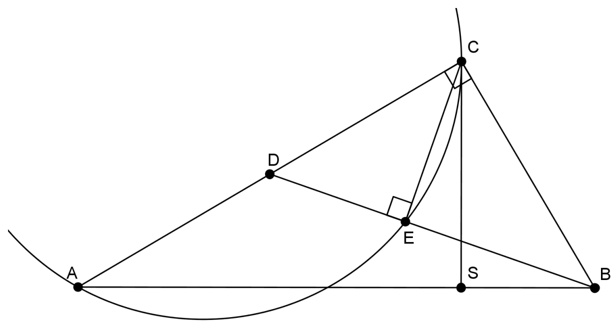
Uitwerkingen

Opgave 1. Gegeven is een bord met $2m$ rijen en $2n$ kolommen, waarbij m en n positieve gehele getallen zijn. Je mag één pion plaatsen op een vakje van dit bord, maar niet het vakje linksonder of het vakje rechtsboven. Vervolgens begint een slak een wandeling te maken over het bord. De slak begint in het vakje linksonder en mag horizontaal en verticaal bewegen. De slak komt niet op het vakje met de pion, maar wil verder elk vakje precies één keer aandoen, waarbij het vakje rechtsboven zijn eindpunt is. Op welke vakjes kun je de pion neerzetten zodat de slak in zijn opzet kan slagen?

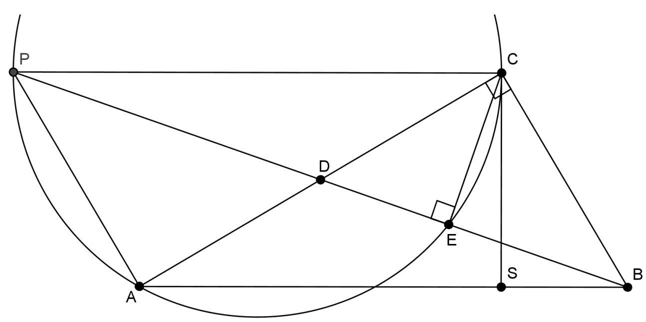
Oplossing. Nummer de rijen van beneden naar boven met 1 tot en met $2m$ en nummer de kolommen van links naar rechts met 1 tot en met $2n$. De slak begint dus in vakje $(1, 1)$ en eindigt in vakje $(2m, 2n)$. Kleur nu de vakjes als een schaakbord, waarbij vakje (i, j) zwart wordt als $i + j$ even is en wit als $i + j$ oneven is. Omdat $2m$ en $2n$ even zijn, zijn er evenveel zwarte als witte vakjes. De slak begint en eindigt op een zwart vakje en bezoekt tijdens zijn wandeling om en om zwarte en witte vakjes. Het aantal zwarte vakjes waar hij komt, is dus 1 groter dan het aantal witte vakjes waar hij komt. Daarom moet de pion wel op een wit vakje staan, dus een vakje (i, j) met $i + j$ oneven.
We laten nu zien dat als de pion op zo'n vakje staat, de slak altijd zijn wandeling kan maken. Zij $1 \leq k \leq m$ en $1 \leq l \leq n$ zo dat de pion in één van de rijen $2k - 1$ en $2k$ staat en in één van de kolommen $2l - 1$ en $2l$. Laat de slak alle rijen met rijnummer kleiner dan $2k - 1$ in zijn geheel aflopen: de oneven rijen van links naar rechts, dan één vakje omhoog en de even rijen van rechts naar links terug. Vervolgens weer één vakje omhoog en dan is hij weer op een oneven rij. Op een gegeven moment komt de slak aan in rij $2k - 1$ en staat dan op het vakje helemaal links. Zolang de slak nog in de kolommen met nummer kleiner dan $2l - 1$ zit, bezoekt hij elk 2×2-vierkantje (in rijen $2k - 1$, $2k$) in de volgorde linksonder-linksboven-rechtsboven-rechtsonder. En dan komt hij linksonder weer aan in het volgende 2×2-vierkantje. Op een gegeven moment arriveert hij in kolom $2l - 1$. Hij staat dan op vakje $(2k - 1, 2l - 1)$ en daar kan de pion niet staan, want $2k - 1 + 2l - 1$ is even. In dit 2×2-vierkantje staat de pion ofwel linksboven ofwel rechtsonder. In het eerste geval loopt de slak linksonder-rechtsonder-rechtsboven en in het tweede geval loopt hij linksonder-linksboven-rechtsboven. In beide gevallen eindigt hij in dit 2×2-vierkantje in het vakje rechtsboven. De rest van de 2×2-vierkantjes in deze rijen kan hij dus in de volgorde linksboven-linksonder-rechtsonder-rechtsboven bezoeken. Steeds eindigt hij rechtsboven. Als hij uiteindelijk in de laatste kolom is aangekomen, gaat hij een rij omhoog, naar rij $2k + 1$. Daar komt hij dus rechtsonderin aan. De overige rijen loopt hij weer in z'n geheel af: de oneven rijen van rechts naar links, dan een vakje omhoog en de even rijen van links

naar rechts terug. In rij $2m$ eindigt hij dus rechtsboven, precies zoals gevraagd.
We concluderen dat de pion op de vakjes (i, j) met $i + j$ oneven neergezet kan worden. $\square$

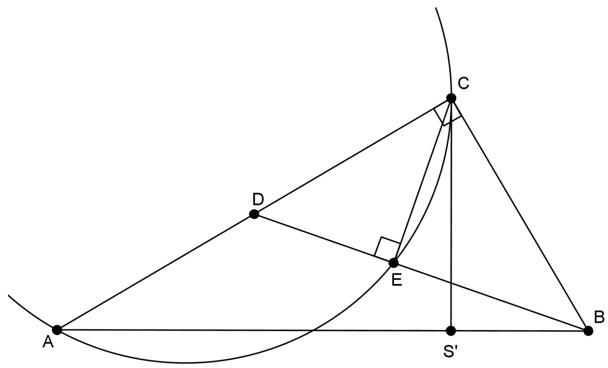
Opgave 2. Gegeven is een driehoek $\triangle ABC$ met $\angle C = 90°$. Het midden van AC noemen we D en de loodrechte projectie van C op BD noemen we E. Bewijs dat de raaklijn in C aan de omgeschreven cirkel van $\triangle AEC$ loodrecht op AB staat.



Oplossing I. Noem S het snijpunt van de raaklijn en AB. We moeten dus bewijzen dat $\angle BSC = 90°$.
Vanwege $\angle BCD = 90° = \angle CED$ geldt $\triangle BCD \sim \triangle CED$, dus $\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|DE|}{|DC|}$. Omdat $|DA| = |DC|$ volgt hieruit $\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|DE|}{|DA|}$. Samen met $\angle BDA = \angle EDA$ geeft dit $\triangle ADE \sim \triangle BDA$ (zhz). Dus $\angle ABD = \angle EAD$. Omdat SC een raaklijn is aan de omgeschreven cirkel van $\triangle AEC$ geldt vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling ook dat $\angle EAD = \angle EAC = \angle SCE$. Dus $\angle SCE = \angle ABD = \angle SBE$. Hieruit volgt dat $SBCE$ een koordenvierhoek is. Dus $\angle BSC = \angle BEC = 90°$. $\square$



Oplossing II. Zij P de spiegeling van B in D. Dan snijden AC en PB elkaar middendoor, dus is $CBAP$ een parallellogram. Dus $\angle CAP = \angle ACB = 90° = \angle CEP$. Dit betekent dat $CEAP$ een koordenvierhoek is en dat CP een middellijn van zijn omgeschreven cirkel is. De raaklijn in C aan deze omgeschreven cirkel staat loodrecht op de middellijn CP. Aangezien in het parallellogram $AB \parallel CP$, staat de raaklijn dus ook loodrecht op AB. $\square$



Oplossing III. Zij S' de loodrechte projectie van C op AB. Er geldt dan $\angle BS'C = 90° = \angle BEC$, dus $BCS'E$ is een koordenvierhoek. Er volgt dat $\angle EDC = 90° - \angle ECD = \angle ECB = 180° - \angle ES'C = \angle ES'A$, dus $\angle EDA = 180° - \angle EDC = 180° - \angle ES'A$, waaruit volgt dat $ADES'$ een koordenvierhoek is. Nu is $\angle S'AE = \angle S'DE$. Verder is vanwege Thales D het middelpunt van de cirkel door A, C en S', dus is $\angle DS'A = \angle S'AD$. Deze twee resultaten samen geven $\angle EAC = \angle S'AC - \angle S'AE = \angle S'AD - \angle S'AE = \angle DS'A - \angle S'DE$. Met de buitenhoekstelling in driehoek $DS'B$ is dit gelijk aan $\angle S'BD = \angle S'BE$ en vanwege koordenvierhoek $BCS'E$ is dat weer gelijk aan $\angle S'CE$. Dus $\angle EAC = \angle S'CE$. Met de raaklijnomtrekshoekstelling volgt hieruit dat $S'C$ raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle EAC$. Deze raaklijn $S'C$ staat dus inderdaad loodrecht op AB. $\square$

Opgave 3. Zij $n \geq 0$ een geheel getal. Een rij a_0, a_1, a_2, ... van gehele getallen wordt als volgt gedefinieerd: er geldt $a_0 = n$ en voor $k \geq 1$ is a_k het kleinste gehele getal groter dan a_{k-1} waarvoor $a_k + a_{k-1}$ het kwadraat van een geheel getal is. Bewijs dat er precies $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ positieve gehele getallen zijn die niet te schrijven zijn in de vorm $a_k - a_\ell$ met $k > \ell \geq 0$.

Oplossing. Zij $m = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$. We bewijzen eerst dat de rij kwadraten $a_0 + a_1$, $a_1 + a_2$, ... precies de rij $(m+1)^2$, $(m+2)^2$, ... is. Vervolgens laten we zien dat de verschillen $a_i - a_{i-1}$ een rij opeenvolgende even getallen en een rij opeenvolgende oneven getallen vormen. Hiermee kunnen we daarna het gevraagde bewijzen.
Merk op dat $a_0 + a_1$ het kleinste kwadraat is dat groter is dan $2n$. Er geldt dus $a_0 + a_1 = (m+1)^2$. We bewijzen nu met inductie naar i dat $a_{i-1} + a_i = (m+i)^2$. Voor $i = 1$ hebben we dit zojuist bewezen. Stel dat $a_{j-1} + a_j = (m+j)^2$. Dat betekent dat $a_{j-1} \geq \frac{(m+j-1)^2}{2}$ (anders had a_j zo gekozen kunnen worden dat $a_{j-1} + a_j = (m+j-1)^2$) en dus

$$\begin{aligned}
a_j &= (m+j)^2 - a_{j-1} \\
&\leq (m+j)^2 - \frac{(m+j-1)^2}{2} \\
&= \frac{2m^2 + 4mj + 2j^2 - (m^2 + 2mj + j^2 + 1 - 2m - 2j)}{2} \\
&= \frac{m^2 + 2mj + j^2 - 1 + 2m + 2j}{2} \\
&< \frac{m^2 + 2mj + j^2 + 1 + 2m + 2j}{2} \\
&= \frac{(m+j+1)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $a_j + a_{j+1} \leq (m+j+1)^2$. Er geldt bovendien $a_j + a_{j+1} > a_{j-1} + a_j = (m+j)^2$, dus $a_j + a_{j+1} = (m+j+1)^2$. Dit voltooit de inductie.
Definieer nu $b_i = a_i - a_{i-1}$ voor alle $i \geq 1$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
b_{i+2} - b_i &= a_{i+2} - a_{i+1} - a_i + a_{i-1} \\
&= (a_{i+2} + a_{i+1}) + (a_i + a_{i-1}) - 2(a_{i+1} + a_i) \\
&= (m+i+2)^2 + (m+i)^2 - 2(m+i+1)^2 \\
&= (m+i)^2 + 4(m+i) + 4 + (m+i)^2 - 2(m+i)^2 - 4(m+i) - 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

voor alle $i \geq 1$. We zien nu dat

$$(b_1, b_3, b_5, \ldots) = (b_1, b_1 + 2, b_1 + 4, \ldots), \qquad (b_2, b_4, b_6, \ldots) = (b_2, b_2 + 2, b_2 + 4, \ldots).$$

Er geldt $b_1 + b_2 = (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) = (a_2 + a_1) - (a_1 + a_0) = (m+2)^2 - (m+1)^2 = 2m+3$. In het bijzonder hebben b_1 en b_2 verschillende pariteit. Nu kunnen in elk geval alle getallen met dezelfde pariteit als b_1 en minstens gelijk aan b_1 geschreven worden als $a_k - a_{k-1}$ voor zekere k. Hetzelfde geldt voor de getallen met dezelfde pariteit als b_2 en minstens gelijk aan b_2. Alle getallen van de vorm $a_k - a_\ell$ met $k \geq \ell + 2$ zijn minstens gelijk aan $b_k + b_{k-1} \geq b_1 + b_2$ en dus groter dan b_1 en groter dan b_2. We kunnen op deze manier dus geen nieuwe getallen meer maken. De getallen die niet te schrijven zijn als $a_k - a_\ell$ met $k > \ell \geq 0$ zijn dus precies de getallen met dezelfde pariteit als b_1 en kleiner dan b_1 en de getallen met dezelfde pariteit als b_2 en kleiner dan b_2. Dit zijn in totaal

$$\left\lfloor \frac{b_1 - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b_2 - 1}{2} \right\rfloor$$

getallen, waarbij binnen de haken van de entierfunctie precies één van beide keren een geheel getal staat. We kunnen dit dus schrijven als

$$\frac{b_1 - 1}{2} + \frac{b_2 - 1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{b_1 + b_2 - 3}{2} = \frac{2m}{2} = m.$$

Er zijn dus precies $m = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ positieve gehele getallen die niet op de gevraagde manier te schrijven zijn. $\square$

Opgave 4. Gegeven is een verzameling A van functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Voor alle $f_1, f_2 \in A$ bestaat er een $f_3 \in A$ zodat

$$f_1\big(f_2(y) - x\big) + 2x = f_3(x + y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat voor alle $f \in A$ geldt:

$$f\big(x - f(x)\big) = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Oplossing. Invullen van $x = 0$ geeft

$$f_1\big(f_2(y)\big) = f_3(y),$$

dus de f_3 die bij f_1 en f_2 hoort, is blijkbaar de samenstelling $f_3(x) = f_1(f_2(x))$. Invullen van $x = -y$ geeft nu dat voor alle $f_1, f_2 \in A$

$$f_1\big(f_2(y) + y\big) - 2y = f_3(0) = f_1(f_2(0))$$

voor alle $y \in \mathbb{R}$.
Invullen van $x = f_2(y)$ geeft dat er voor alle $f_1, f_2 \in A$ een $f_3 \in A$ bestaat met

$$f_1(0) + 2f_2(y) = f_3\big(f_2(y) + y\big)$$

voor alle $y \in \mathbb{R}$. We hebben hiervoor gezien dat we $f_3(f_2(y) + y)$ kunnen schrijven als $2y + f_3(f_2(0))$. Dus

$$2f_2(y) = 2y + f_3(f_2(0)) - f_1(0)$$

voor alle $y \in \mathbb{R}$. We concluderen dat er een $d \in \mathbb{R}$ is, onafhankelijk van y, zodat $f_2(y) = y + d$ voor alle $y \in \mathbb{R}$.
Dus elke $f \in A$ is van de vorm $f(x) = x + d$ met d een constante. Er geldt dan

$$f\big(x - f(x)\big) = f\big(x - (x + d)\big) = f(-d) = -d + d = 0.$$

$\square$