IMO-selectietoets I

donderdag 1 juni 2017

Opgave 1. Zij n een positief geheel getal. Gegeven zijn cirkelvormige schijven met stralen $1, 2, \ldots, n$. Van elke grootte hebben we twee schijven: een doorzichtige en een ondoorzichtige. In elke schijf zit een gaatje, precies in het midden, waarmee we de schijven op een rechtopstaand staafje kunnen stapelen. We willen nu stapels maken die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- Van elke grootte ligt er precies één schijf op de stapel.
- Als we recht van boven kijken, kunnen we de buitenranden van alle n schijven op de stapel zien. (Dat wil zeggen, als er een ondoorzichtige schijf op de stapel ligt, dan mogen daaronder geen kleinere schijven liggen.)

Bepaal het aantal verschillende stapels dat we kunnen maken onder deze voorwaarden. (Twee stapels zijn verschillend als ze niet precies dezelfde verzameling schijven gebruiken, maar ook als ze wel precies dezelfde verzameling schijven gebruiken maar niet in dezelfde volgorde.)

Opgave 2. Zij $n \geq 4$ een geheel getal. Bekijk een regelmatige $2n$-hoek waarbij aan elk hoekpunt een geheel getal is toegekend, wat we de *waarde* van dat hoekpunt noemen. Als vier verschillende hoekpunten van deze $2n$-hoek een rechthoek vormen, dan noemen we de som van de waarden van deze hoekpunten een *rechthoekssom.*
Bepaal voor welke gehele (niet-noodzakelijk positieve) m we de getallen $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+2n$ als waarden kunnen toekennen aan de hoekpunten (in een of andere volgorde) zodat elke rechthoekssom een priemgetal is. *(Priemgetallen zijn per definitie positief.)*

Opgave 3. Bepaal alle mogelijke waarden van $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ als x en y reële getallen (ongelijk aan 0) zijn die voldoen aan $x^3+y^3+3x^2y^2=x^3y^3$.

Opgave 4. In driehoek ABC is M het midden van AB en N het midden van CM. Zij X een punt dat voldoet aan $\angle XMC = \angle MBC$ en $\angle XCM = \angle MCB$, zo dat X en B aan verschillende kanten van CM liggen. Zij Ω de omgeschreven cirkel van driehoek AMX.

a) Bewijs dat CM raakt aan Ω.

b) Bewijs dat de lijnen NX en AC snijden op Ω.