



# Selectietoets

vrijdag 10 maart 2017

**Opgave 1.** Zij  $n$  een even positief geheel getal. Een rijtje van  $n$  reële getallen noemen we *volledig* als voor elke gehele  $m$  met  $1 \leq m \leq n$  geldt dat de som van de eerste  $m$  termen of de som van de laatste  $m$  termen van het rijtje geheel is. Bepaal het minimale aantal gehele getallen in een volledig rijtje van  $n$  getallen.

**Opgave 2.** Gegeven is de functie  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}$  die voldoet aan de eigenschappen:

- (i)  $f(p) = 1$  voor alle priemgetallen  $p$ ,
- (ii)  $f(xy) = yf(x) + xf(y)$  voor alle  $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Bepaal de kleinste  $n \geq 2016$  met  $f(n) = n$ .

**Opgave 3.** Zij  $ABC$  een driehoek met  $\angle A = 90^\circ$  en zij  $D$  het voetpunt van de hoogtelijn vanuit  $A$ . De middens van  $AD$  en  $AC$  noemen we respectievelijk  $E$  en  $F$ . Zij  $M$  het middelpunt van de omschreven cirkel van  $\triangle BEF$ . Bewijs dat  $AC \parallel BM$ .

**Opgave 4.** Een viertal  $(a, b, c, d)$  van positieve gehele getallen met  $a \leq b \leq c \leq d$  noemen we *goed* indien we ieder geheel getal rood, blauw, groen of paars kunnen kleuren zodat

- van iedere  $a$  opeenvolgende getallen er tenminste één rood is;
- van iedere  $b$  opeenvolgende getallen er tenminste één blauw is;
- van iedere  $c$  opeenvolgende getallen er tenminste één groen is;
- van iedere  $d$  opeenvolgende getallen er tenminste één paars is.

Bepaal alle goede viertallen met  $a = 2$ .

**Opgave 5.** Bepaal alle paren priemgetallen  $(p, q)$  zodat  $p^2 + 5pq + 4q^2$  het kwadraat van een geheel getal is.