IMO-selectietoets III

zaterdag 4 juni 2016

Opgave 1. Zij n een natuurlijk getal. In een dorp wonen n jongens en n meisjes. Voor het jaarlijkse bal moeten n danskoppels worden gevormd, die elk uit één jongen en één meisje bestaan. Elk meisje geeft een lijstje door, bestaande uit de naam van de jongen met wie ze het liefst zou willen dansen, plus nul of meer namen van andere jongens met wie ze ook wel zou willen dansen. Het blijkt dat er n danskoppels kunnen worden gevormd zodat elk meisje danst met een jongen die op haar lijstje staat.
Bewijs dat het mogelijk is om n danskoppels te vormen zodat elk meisje danst met een jongen die op haar lijstje staat en waarbij ten minste één meisje danst met de jongen met wie ze het liefst wil dansen.

Opgave 2. Voor reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, allemaal verschillend, berekenen we de $\frac{n(n-1)}{2}$ sommen $a_i + a_j$ met $1 \leq i < j \leq n$ en sorteren deze vervolgens van klein naar groot. Bepaal alle gehele $n \geq 3$ waarvoor er $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan zodat dit rijtje van $\frac{n(n-1)}{2}$ sommen een rekenkundige rij vormt (d.w.z. dat het verschil tussen twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde is).

Opgave 3. Zij k een positief geheel getal en geef de som van de cijfers van een positief geheel getal n aan met $s(n)$. Bewijs dat er onder de positieve gehele getallen met k cijfers evenveel getallen n zijn die voldoen aan $s(n) < s(2n)$ als getallen n die voldoen aan $s(n) > s(2n)$.

Opgave 4. Gegeven zijn cirkels Γ_1 met middelpunt A en Γ_2 met middelpunt B, waarbij A op Γ_2 ligt. Op Γ_2 ligt verder een variabel punt P, niet op AB. Een lijn door P die Γ_1 raakt in S, snijdt Γ_2 nogmaals in Q, waarbij P en Q aan dezelfde kant van AB liggen. Een andere lijn door Q raakt Γ_1 in T. Zij verder M het voetpunt van de loodlijn vanuit P op AB. Zij N het snijpunt van AQ en MT. Bewijs dat N op een lijn ligt die onafhankelijk is van de plaats van P op Γ_2.