IMO-selectietoets I

donderdag 2 juni 2016

Opgave 1. Zij ABC een scherphoekige driehoek. Zij H het voetpunt van de hoogtelijn vanuit C op AB. Veronderstel dat $|AH| = 3|BH|$. Laat M en N de middens van respectievelijk AB en AC zijn. Zij P een punt zodat $|NP| = |NC|$ en $|CP| = |CB|$ en zodat B en P aan verschillende kanten van de lijn AC liggen.
Bewijs dat $\angle APM = \angle PBA$.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal en bekijk een vierkant met afmetingen $2^n \times 2^n$. We bedekken dit vierkant met een aantal (minstens 2) niet-overlappende rechthoeken, zodat elke rechthoek gehele afmetingen heeft en een tweemacht als oppervlakte. Bewijs dat twee van de rechthoeken in de bedekking dezelfde afmetingen hebben. (Twee rechthoeken hebben dezelfde afmetingen als ze dezelfde breedte en dezelfde hoogte hebben, waarbij ze niet gedraaid mogen worden.)

Opgave 3. Vind alle positieve gehele k waarvoor de vergelijking

$$\operatorname{kgv}(m,n) - \operatorname{ggd}(m,n) = k(m-n)$$

geen positieve gehele oplossingen (m,n) met $m \neq n$ heeft.

Opgave 4. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.