Selectietoets

vrijdag 18 maart 2016

Uitwerkingen

Opgave 1. Voor een positief geheel getal n dat geen tweemacht is, definiëren we $t(n)$ als de grootste oneven deler van n en $r(n)$ als de kleinste positieve oneven deler van n die ongelijk aan 1 is. Bepaal alle positieve gehele getallen n die geen tweemacht zijn en waarvoor geldt

$$n = 3t(n) + 5r(n).$$

Oplossing I. Als n oneven is, geldt $t(n) = n$ dus is $3t(n)$ groter dan n, tegenspraak. Als n deelbaar door 2 is maar niet deelbaar door 4, dan geldt $t(n) = \frac{1}{2}n$ en is $3t(n)$ weer groter dan n, opnieuw tegenspraak. We kunnen concluderen dat n in elk geval deelbaar door 4 moet zijn. Als n deelbaar door 16 is, dan is $t(n) \leq \frac{1}{16}n$. Verder is $r(n) \leq t(n)$, dus $3t(n) + 5r(n) \leq 8t(n) \leq \frac{1}{2}n < n$, tegenspraak. Dus n is niet deelbaar door 16. We kunnen dus schrijven $n = 4m$ of $n = 8m$ met $m \geq 3$ oneven.
Stel $n = 4m$ met $m \geq 3$ oneven. Dan geldt $t(n) = m$, dus $4m = 3m + 5r(n)$, dus $5r(n) = m$. Omdat $r(n)$ gelijk is aan de kleinste oneven priemdeler van n, wat ook de kleinste priemdeler van m is, moet nu m van de vorm $m = 5p$ zijn met $p \leq 5$ een oneven priemgetal. Dus $m = 15$ of $m = 25$, wat $n = 60$ of $n = 100$ geeft. Beide oplossingen voldoen.
Stel dat $n = 8m$ met $m \geq 3$ oneven. Opnieuw geldt $t(n) = m$, dus $8m = 3m + 5r(n)$, dus $5r(n) = 5m$, oftewel $r(n) = m$. We zien dat m priem is. Dus $n = 8p$ met p een oneven priemgetal. Deze familie van oplossingen voldoet ook.
We vinden als oplossingen dus $n = 60$, $n = 100$ en $n = 8p$ met p een oneven priemgetal. $\square$

Oplossing II. Noem p de kleinste oneven priemdeler van n. Dan is $r(n) = p$. We kunnen nu schrijven $n = 2^t mp$ met m oneven en $t \geq 0$. Er geldt dan $t(n) = pm$, dus de gegeven gelijkheid gaat over in $2^t mp = 3pm + 5p$, oftewel $(2^t - 3)mp = 5p$, dus $(2^t - 3)m = 5$. We zien dat m een deler van 5 moet zijn, dus $m = 1$ of $m = 5$. Als $m = 1$ geldt $2^t = 8$, dus $t = 3$. We krijgen dan $n = 8p$ met p een oneven priem. Deze oplossing voldoet voor alle oneven priemgetallen p. Als $m = 5$ geldt $2^t = 4$, dus $t = 2$. We krijgen dan $n = 4 \cdot 5 \cdot p$ met p een oneven priem. Deze oplossing voldoet alleen als p de kleinste oneven priemdeler is, dus als $p = 3$ of $p = 5$. Zo vinden we nog twee oplossingen: $n = 60$ en $n = 100$. $\square$

Opgave 2. Bepaal alle drietallen (x, y, z) van niet-negatieve reële getallen die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$x^2 - y = (z-1)^2,$$
$$y^2 - z = (x-1)^2,$$
$$z^2 - x = (y-1)^2.$$

Oplossing. Haakjes uitwerken en alles bij elkaar optellen geeft

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) + 3,$$

dus $x + y + z = 3$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $x \leq y, z$. Dan geldt $0 \leq x \leq 1$. Dus $x^2 \leq x$, dus $x^2 - y \leq x - y \leq 0$. Anderzijds is $x^2 - y = (z-1)^2 \geq 0$. Dus moet gelijkheid gelden in o.a. $x^2 \leq x$ en $x - y \leq 0$. Uit de eerste gelijkheid volgt $x = 0$ of $x = 1$ en uit de tweede $x = y$. Stel $x = y = 0$, dan volgt uit $x + y + z = 3$ dat $z = 3$. Maar dan geldt niet $x^2 - y = (z-1)^2$, tegenspraak. We houden alleen het geval over dat $x = y = 1$. Dan geldt $z = 3 - 1 - 1 = 1$. Dit drietal voldoet inderdaad en is daarmee de enige oplossing. $\square$

Opgave 3. Zij $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek met $\angle A = 90^\circ$ en omgeschreven cirkel Γ. De ingeschreven cirkel raakt aan BC in een punt D. Zij E het midden van de boog AB van Γ waar C niet op ligt en zij F het midden van de boog AC van Γ waar B niet op ligt.

a) Bewijs dat $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

b) Bewijs dat EF door de raakpunten van de ingeschreven cirkel aan AB en AC gaat.

Oplossing I.

a) Het midden E van boog AB waar C niet op ligt, ligt op de bissectrice CI. Net zo ligt F op BI. Er geldt $\angle IFC = \angle BFC = \angle BAC = 90^\circ$ omdat $ABCF$ een koordenvierhoek is en $\angle IDC = 90^\circ$ omdat D het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan BC is. Dus $\angle IFC + \angle IDC = 180^\circ$, waaruit volgt dat $FIDC$ een koordenvierhoek is. Nu geldt $\angle DFI = \angle DCI = \frac{1}{2}\angle ACB$, terwijl ook $\angle IFE = \angle BFE = \angle BCE = \frac{1}{2}\angle ACB$. Dus $\angle DFE = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ACB$. Analoog is $\angle DEF = \angle ABC$. Samen geeft dit $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

b) Zij S het snijpunt van EF met AB. In het vorige onderdeel hebben we gezien dat BF de bissectrice is van $\angle DFE = \angle DFS$. Ook is BF de bissectrice van $\angle ABC = \angle SBD$. Dus $\triangle BDF \cong \triangle BSF$ vanwege (HZH). Dit betekent dat $|BD| = |BS|$. Anderzijds zijn de afstanden van B tot de raakpunten van de ingeschreven cirkel aan BC en BA gelijk en het ene raakpunt is D, dus het andere raakpunt moet S zijn. Dus EF gaat door het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan AB. Analoog gaat hij ook door het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan AC.

$\square$

Oplossing II.

a) Zoals in de eerste oplossing bewijzen we dat $FIDC$ een koordenvierhoek is. Vanwege de buitenhoekstelling is $\angle CIF = \angle ICB + \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 45^\circ$. Dus $\angle CDF = \angle CIF = 45^\circ$. Analoog is $\angle BDE = 45^\circ$, zodat $\angle EDF = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Zij nu M het midden van BC. Dan is M ook het midden van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ dus staat MF loodrecht op AC. Dat betekent dat $MF \parallel AB$. Zo ook is $ME \parallel AC$. Dus $\angle EMF = 90^\circ$. We zien dat $\angle EMF = \angle EDF$, dus D, E, F en M liggen op één cirkel. We onderscheiden nu twee gevallen.

Als $D = M$, dan geldt $45^\circ = \angle CDF = \angle CMF = \angle CBA$ wegens F-hoeken, dus $\triangle ABC$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Omdat M het middelpunt van de omgeschreven cirkel is, waar ook E en F op liggen, is $|ME| = |MF|$, dus ook $\triangle MEF$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Dus $\triangle ABC \sim \triangle MEF = \triangle DEF$.

In het andere geval geldt $D \neq M$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat D dichter bij C ligt dan M. Dan geldt $\angle DEF = \angle DMF = \angle CBA$ wegens F-hoeken en $\angle DFE = 180° - \angle DME = \angle BME = \angle BCA$ wegens F-hoeken. Dus met (hh) is nu ook $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

b) Zij L het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan AC. We hebben al gezien dat $FIDC$ een koordenvierhoek is wegens $\angle IDC = 90° = \angle IFC$. Omdat ook $\angle ILC = 90°$, ligt L op dezelfde cirkel. Dus

$$\angle LFB = \angle LFI = \angle LCI = \angle ACE = \angle ECB = \angle EFB,$$

waaruit volgt dat E, F en L op een lijn liggen. Dus EF gaat door het raakpunt L. Analoog gaat EF ook door het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan AB.

□

Oplossing III.

a) Zoals in de vorige oplossing bewijzen we dat $\angle CDF = 45° = \angle BDE$. Zij nu F' de spiegeling van F in BC. Omdat BC de middellijn van Γ is, ligt F' weer op Γ. Verder is $\angle CDF' = \angle CDF = 45°$ en $\angle CDE = 180° - \angle BDE = 135°$, dus $\angle CDF' + \angle CDE = 180°$, waaruit volgt dat F', D en E op een lijn liggen. We zien dat

$$\angle FED = \angle FEF' = \angle FBF' = 2\angle FBC = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ABC.$$

Analoog geldt $\angle EFD = \angle ACB$, dus met (hh) geldt $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

b) Laat K en L de raakpunten zijn van de inschreven cirkel aan respectievelijk AB en AC. Omdat $\angle AKI = \angle ALI = 90°$ en ook $\angle KAL = 90°$, is $AKIL$ een rechthoek. Het is zelfs een vierkant, aangezien $|IK| = |IL|$. Dus diagonaal KL is de middelloodlijn van AI. We gaan nu bewijzen dat EF ook de middelloodlijn van AI is, zodat EF samenvalt met KL en het gevraagde bewezen is.

Er geldt

$$\angle FAI = \angle FAC + \angle CAI = \angle FBC + \angle CAI = \tfrac{1}{2}\angle ABC + \tfrac{1}{2}\angle BAC$$

en verder, wegens de buitenhoekstelling in $\triangle ABI$,

$$\angle AIF = \angle IAB + \angle IBA = \tfrac{1}{2}\angle ABC + \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Dus $\angle FAI = \angle AIF$, waaruit volgt $|AF| = |IF|$. Dat betekent dat F op de middelloodlijn van AI ligt. Analoog kunnen we laten zien dat ook E op de middelloodlijn van AI ligt. Dus EF is inderdaad de middelloodlijn van AI.

□

Opgave 4. De Facebookgroep Olympiadetraining heeft minstens vijf leden. Er is een zeker getal k met de eigenschap: voor elk k-tal leden geldt dat er minstens één lid van dat k-tal bevriend is met de andere $k-1$. (Vriendschap is wederzijds: als A bevriend is met B, dan is B ook bevriend met A.)

a) Stel $k = 4$. Kun je met zekerheid zeggen dat de Facebookgroep een lid heeft dat vrienden is met alle andere leden?

b) Stel $k = 5$. Kun je met zekerheid zeggen dat de Facebookgroep een lid heeft dat vrienden is met alle andere leden?

Oplossing.

a) Ja, dat kan. Als iedereen bevriend is met iedereen, dan zijn we klaar. Stel dus dat er twee leden zijn, zeg A en B, die geen vrienden met elkaar zijn. Als we een groep van vier bekijken met A, B en twee andere leden, dan moet één van die andere twee bevriend zijn met de ander en met A en B. In het bijzonder zijn die twee anderen bevriend met elkaar. Dit geldt voor elke twee leden (ongelijk aan A en B) die we kiezen, dus elk tweetal zonder A en B is bevriend met elkaar. Neem nu A, B, C en D en zeg dat C bevriend is met A, B en D. Hij is verder ook bevriend met alle andere leden van de groep, dus C is iemand die bevriend is met iedereen.

b) Nee, dat kan niet. We geven een tegenvoorbeeld. Stel dat de Facebookgroep zes leden heeft, namelijk A, B, C, D, E en F. Zij zijn allemaal vrienden van elkaar, behalve het paar (A, B), het paar (C, D) en het paar (E, F). Dat betekent dat er geen enkel lid vrienden is van alle andere leden. Als we een groep van vijf nemen, dan is dat zonder verlies van algemeenheid A, B, C, D en E. Hierbij is iemand die vrienden is met de andere vier, namelijk E. Dus aan de voorwaarde is voldaan.

$\square$

Opgave 5. Bepaal alle paren (m, n) van positieve gehele getallen waarvoor

$$(m+n)^3 \mid 2n(3m^2+n^2)+8.$$

Oplossing. Stel dat het quotiënt van $2n(3m^2+n^2)+8$ en $(m+n)^3$ niet gelijk aan 1 is. Dan is het minstens 2, dus geldt

$$(m+n)^3 \leq n(3m^2+n^2)+4,$$

oftewel

$$m^3+3m^2n+3mn^2+n^3 \leq 3m^2n+n^3+4,$$

oftewel

$$m^3+3mn^2 \leq 4.$$

Hieruit volgt meteen $m < 2$, dus $m = 1$. Dan staat er $1+3n^2 \leq 4$, dus ook $n = 1$. Het paar $(m, n) = (1, 1)$ is inderdaad een oplossing, want er geldt $2^3 \mid 2 \cdot 4 + 8$.
De andere mogelijkheid is dat het quotiënt juist wel gelijk aan 1 is. Dan geldt

$$(m+n)^3 = 2n(3m^2+n^2)+8,$$

oftewel

$$m^3+3m^2n+3mn^2+n^3 = 6m^2n+2n^3+8,$$

oftewel

$$m^3-3m^2n+3mn^2-n^3 = 8.$$

De linkerkant kunnen we ontbinden als $(m-n)^3$. Dus er geldt $m-n = 2$, oftewel $m = n+2$. Uit de voorgaande berekeningen volgt direct ook dat $(m, n) = (n+2, n)$ inderdaad een oplossing is voor alle positieve gehele n.
We concluderen dat de oplossingen zijn: $(m, n) = (1, 1)$ en $(m, n) = (n+2, n)$ voor $n \geq 1$. $\square$