IMO-selectietoets II

zaterdag 6 juni 2015

Uitwerkingen

Opgave 1. Laat a en b twee positieve gehele getallen zijn die voldoen aan $\text{ggd}(a, b) = 1$. Beschouw een pion die op roosterpunt (x, y) staat. Een stap van type A bestaat uit het verplaatsen van de pion naar één van de volgende velden: $(x+a, y+a), (x+a, y-a), (x-a, y+a)$ of $(x-a, y-a)$. Een stap van type B bestaat uit het verplaatsen van de pion naar $(x+b, y+b), (x+b, y-b), (x-b, y+b)$ of $(x-b, y-b)$.
Zet nu een pion op $(0, 0)$. Je mag een (eindig) aantal stappen uitvoeren, en wel om en om stappen van type A en type B, beginnend met een stap van type A. Je mag een even aantal of een oneven aantal stappen uitvoeren, dus de laatste stap mag zowel van type A als van type B zijn. Bepaal de verzameling van alle roosterpunten (x, y) die je met zo'n serie van stappen kunt bereiken.

Oplossing. We gaan bewijzen dat een roosterpunt (x, y) bereikbaar is dan en slechts dan als $x + y \equiv 0 \mod 2$.
Als we de pion verplaatsen van (x, y) naar $(x \pm a, y \pm a)$, dan wordt de som van de nieuwe coördinaten gelijk aan $x + y + 2a$, $x + y$ of $x + y - 2a$, dus modulo 2 congruent aan de som van de oude coördinaten. Hetzelfde geldt bij het doen van een stap van type B. Omdat de pion begint op $(0, 0)$, geldt op elk moment (na het uitvoeren van een aantal stappen) dat de som van de coördinaten van het punt waar hij op staat, even is. De punten (x, y) met $x + y \equiv 1 \mod 2$ zijn dus niet te bereiken.
Nu laten we zien dat alle andere punten wel te bereiken zijn. Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$, bestaan er gehele getallen m, n met $ma + nb = 1$. Dan geldt $2ma + 2nb = 2$. Van de getallen m en n moet er eentje positief en eentje negatief zijn. We nemen aan dat m positief is. Het andere geval gaat analoog. We gaan nu eerst $2m$ stappen van type A en $2m$ stappen van type B doen. Voor de stappen van type A kiezen we m keer $(x, y) \mapsto (x + a, y + a)$ en m keer $(x, y) \mapsto (x + a, y - a)$. Voor de stappen van type B kiezen we m keer $(x, y) \mapsto (x + b, y + b)$ en m keer $(x, y) \mapsto (x - b, y - b)$. Het effect van al deze stappen samen is dat de x-coördinaat $2ma$ groter wordt en de y-coördinaat gelijk blijft (in feite doen de B-stappen helemaal niets). Hierna doen we nog $2|n|$ stappen van type A en $2|n|$ stappen van type B. Voor de stappen van type A kiezen we $|n|$ keer $(x, y) \mapsto (x + a, y + a)$ en $|n|$ keer $(x, y) \mapsto (x - a, y - a)$. Voor de stappen van type B kiezen we $|n|$ keer $(x, y) \mapsto (x - b, y + b)$ en $|n|$ keer $(x, y) \mapsto (x - b, y - b)$. Het effect van al deze stappen samen is dat de x-coördinaat $2|n|b$ kleiner wordt en de y-coördinaat gelijk blijft (in feite doen nu de A-stappen helemaal niets). Al met al hebben we na deze $4m + 4|n|$ stappen de pion verplaatst van een beginpunt (x, y) naar het punt $(x + 2ma - 2|n|b, y) = (x + 2, y)$. We kunnen een analoge serie stappen construeren die de pion van (x, y) naar $(x, y + 2)$ verplaatst, en ook analoge series stappen

die de pion van (x, y) verplaatsen naar $(x-2, y)$ en $(x, y-2)$. Elk van deze series begint met een stap van type A en eindigt met een stap van type B.
Door dit soort series achter elkaar te plakken, kunnen we de pion van $(0,0)$ verplaatsen naar elk punt (x, y) met $x \equiv y \equiv 0 \mod 2$. Bekijk nu een punt (x, y) met $x \equiv y \equiv 1 \mod 2$. Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$, is minstens één van a en b oneven. Stel dat a oneven is. Dan is het punt $(x-a, y-a)$ een punt met twee even coördinaten, waarnaartoe we dus een serie stappen kunnen construeren, die eindigt op een stap van type B. We voegen hierachter nu een stap van type A toe waarmee we van $(x-a, y-a)$ op (x, y) komen. Stel vervolgens dat a even is. Dan is b oneven. Het punt $(x-b, y-b)$ heeft nu twee even coördinaten, dus dit punt kunnen we bereiken met een serie stappen die eindigt op een stap van type B. We voeren nog drie stappen hierna uit:

$$(x-b, y-b) \xmapsto{\text{A}} (x-b-a, y-b-a) \xmapsto{\text{B}} (x-a, y-a) \xmapsto{\text{A}} (x, y).$$

Zo kunnen we het punt (x, y) dus ook bereiken.
We concluderen dat we alle punten (x, y) met $x + y \equiv 0 \mod 2$ kunnen bereiken en alle overige punten niet. $\square$

Opgave 2. Bepaal alle positieve gehele getallen n waarvoor er positieve gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan met

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n = 6n$$

en

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \ldots + \frac{n}{a_n} = 2 + \frac{1}{n}.$$

Oplossing. Als we de ongelijkheid van het rekenkundig en harmonisch gemiddelde toepassen op a_1, twee keer a_2, drie keer a_3, $\ldots$, n keer a_n, dan vinden we

$$\frac{6n}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{\frac{1}{2}n(n+1)} \geq \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \ldots + \frac{n}{a_n}} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Er geldt

$$\frac{6n}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{12}{n+1} < \frac{12}{n}$$

en

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{2}n^2(n+1)}{2n+1} > \frac{\frac{1}{2}n^2(n+1)}{2n+2} = \frac{1}{4}n^2.$$

Alles bij elkaar vinden we $\frac{12}{n} > \frac{1}{4}n^2$, oftewel $48 > n^3$, waaruit volgt $n \leq 3$.
Met $n = 1$ krijgen we $a_1 = 6$ en $\frac{1}{a_1} = 3$, wat in tegenspraak met elkaar is. Dus $n = 1$ kan niet.
Met $n = 2$ krijgen we $a_1 + 2a_2 = 12$ en $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} = 2 + \frac{1}{2}$. Als $a_2 \geq 2$ geldt $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} \leq 1 + 1$ en dat is te klein. Dus moet $a_2 = 1$, maar dan vinden we $a_1 = 12 - 2 = 10$ en dus $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} = \frac{1}{10} + 2$, tegenspraak. Dus $n = 2$ kan niet.
Bij $n = 3$ is er een oplossing, namelijk $a_1 = 6$, $a_2 = 3$ en $a_3 = 2$ (invullen laat zien dat deze voldoet). Dus $n = 3$ kan wel en we concluderen dat $n = 3$ de enige oplossing is. $\square$

Opgave 3. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC. Op de lijn door B evenwijdig aan AC ligt een punt D, zodat D en C aan dezelfde kant van lijn AB liggen. De middelloodlijn van CD snijdt de lijn AB in E. Bewijs dat driehoek CDE gelijkzijdig is.

Oplossing I. We bekijken in alle oplossingen de configuratie waarin E tussen A en B ligt. Het geval dat B tussen A en E ligt gaat analoog. (En vanwege de voorwaarde dat D en C aan dezelfde kant van AB liggen, kan A niet tussen B en E liggen, dus hebben we zo alle gevallen gehad.)
Omdat E op de middelloodlijn van CD ligt, geldt $|EC| = |ED|$. Het is dus voldoende om te bewijzen dat tophoek $\angle CED = 60°$. Stel eerst dat $E = B$. Dan is $\angle CED = \angle CBD = \angle ACB = 60°$ wegens Z-hoeken, dus zijn we klaar. Stel nu dat $E \neq B$.
Omdat BD evenwijdig aan AC is, geldt $\angle CBD = \angle ACB = 60° = \angle CBA$. Het punt E is dus het snijpunt van de middelloodlijn van CD en de buitenbissectrice van $\angle CBD$. Dat betekent dat E op de omgeschreven cirkel van driehoek CDB ligt. *(Dit is een bekend feit, maar het is ook als volgt te bewijzen. Zij E' het snijpunt van de buitenbissectrice van $\angle CBD$ en de omgeschreven cirkel van $\triangle CBD$. Omdat BE' de buitenbissectrice is, geldt $\angle CBE' = 180° - \angle DBE'$. Dus koorden CE' en DE' zijn even lang, wat betekent dat E' op de middelloodlijn van CD ligt.)* We concluderen dat $CEBD$ een koordenvierhoek is. Dus $\angle CED = \angle CBD = 60°$. □

Oplossing II. Zij E' het tweede snijpunt van AB met de omgeschreven cirkel van $\triangle BCD$. Wegens koordenvierhoek $BE'CD$ geldt dan $\angle E'DC = \angle E'BC = \angle ABC = 60°$ en $\angle E'CD = 180° - \angle E'BD = 60°$ wegens de evenwijdigheid. Dus driehoek CDE' heeft twee hoeken van $60°$ en is daarom gelijkzijdig. Vanwege deze gelijkzijdigheid ligt verder E' op de middelloodlijn van CD, dus $E' = E$. Dus $\triangle CDE$ is gelijkzijdig. □

Oplossing III. Zij E' een punt op AB met $|AE'| = |BD|$, zodat E' en B aan dezelfde kant van A liggen. Er geldt $|AC| = |BC|$ en $\angle CAE = 60° = \angle CBD$ wegens Z-hoeken en de gelijkzijdigheid. Dus $\triangle CAE' \cong \triangle CBD$ (ZHZ). Hieruit volgt $|CE'| = |CD|$ en $\angle E'CA = \angle DCB$. Uit het laatste volgt $\angle E'CD = \angle E'CB + \angle BCD = \angle E'CB + \angle E'CA = \angle ACB = 60°$. Dus driehoek CDE' is gelijkbenig met tophoek $60°$, dus gelijkzijdig. Vanwege deze gelijkzijdigheid ligt verder E' op de middelloodlijn van CD, dus $E' = E$. Dus $\triangle CDE$ is gelijkzijdig. □

Opgave 4. Je mag elk van de getallen 1 tot en met 2014 een kleur geven, waarbij precies de helft rood moet worden en de andere helft blauw. Vervolgens bekijk je het aantal k van positieve gehele getallen die te schrijven zijn als de som van een rood en een blauw getal. Bepaal de maximale waarde van k die je kunt bereiken.

Oplossing. Noem $n = 2014$. We gaan bewijzen dat de maximale k gelijk is aan $2n - 5$. Het kleinste getal dat je zou kunnen schrijven als de som van een rood en een blauw getal is $1 + 2 = 3$ en het grootste getal is $(n - 1) + n = 2n - 1$. Er zijn dus hoogstens $2n - 3$ getallen te schrijven als de som van een rood en een blauw getal.
Stel dat de getallen zo gekleurd kunnen worden dat er $2n-3$ of $2n-4$ getallen te schrijven zijn als som van een rood en een blauw getal. Er is nu hooguit één getal van 3 tot en met $2n - 1$ dat niet zo te schrijven is. We laten nu eerst zien dat we zonder verlies van algemeenheid mogen aannemen dat dit getal minstens $n + 1$ is. We kunnen namelijk een tweede kleuring maken waarbij een getal i blauw is dan en slechts dan als in de eerste kleuring $n+1-i$ blauw was. Dan is een getal m bij de tweede kleuring te schrijven als som van rood en blauw dan en slechts dan als $2n + 2 - m$ in de eerste kleuring te schrijven was als som van rood en blauw. Dus als in de eerste kleuring een getal kleiner dan $n + 1$ niet te schrijven was als som van rood en blauw, dan is in de tweede kleuring juist een getal groter dan $2n + 2 - (n + 1) = n + 1$ niet te schrijven als som van rood en blauw.
We mogen dus aannemen dat de getallen 3 tot en met n allemaal te schrijven zijn als som van rood en blauw. Omdat rood en blauw verwisselbaar zijn, mogen we ook nog zonder verlies van algemeenheid aannemen dat 1 blauw gekleurd is. Omdat 3 te schrijven is als som van rood en blauw en dat alleen $3 = 1 + 2$ kan zijn, moet 2 rood zijn. Stel nu dat we weten dat 2 tot en met l rood zijn, voor zekere l met $2 \leq l \leq n - 2$. Dan zijn in alle mogelijke sommen $a + b = l + 2$ met $a, b \geq 2$ beide getallen rood gekleurd, maar we weten dat we $l + 2$ kunnen schrijven als som van rood en blauw (want $l + 2 \leq n$), dus moet dat wel $1 + (l + 1)$ zijn. Dus $l + 1$ is ook rood gekleurd. Met inductie zien we nu dus dat de getallen 2 tot en met $n - 1$ allemaal rood zijn. Dat zijn $n - 2 = 2012$ getallen. Maar er zijn slechts $\frac{1}{2}n = 1007$ getallen rood, tegenspraak.
We concluderen dat er minstens twee getallen van 3 tot en met $2n-1$ niet te schrijven zijn als som van een rood en een blauw getal. We laten nu zien dat we de getallen zo kunnen kleuren dat alle getallen van 4 tot en met $2n - 2$ te schrijven zijn als som van een rood en een blauw getal, zodat de maximale k gelijk is aan $2n - 5$.
Kleur hiervoor alle even getallen behalve n blauw en verder ook nog het getal 1. Alle oneven getallen behalve 1 kleuren we rood en verder ook nog het getal n. Door 1 op te tellen bij een oneven getal (ongelijk aan 1) kunnen we alle even getallen van 4 tot en met n schrijven als som van een rood en een blauw getal. Door 2 op te tellen bij een oneven getal (ongelijk aan 1) kunnen we alle oneven getallen van 5 tot en met $n + 1$ schrijven als som van een rood en een blauw getal. Door $n - 1$ op te tellen bij een even getal (ongelijk aan n) kunnen we alle oneven getallen van $n + 1$ tot en met $2n - 3$ schrijven als som van een rood en een blauw getal. Door n op te tellen bij een even getal (ongelijk aan n) kunnen we alle even getallen van $n + 2$ tot en met $2n - 2$ schrijven als som van een rood en een

blauw getal. Al met al kunnen we dus alle getallen van 4 tot en met $2n-2$ schrijven als som van een rood en een blauw getal.

We concluderen dat de maximale k gelijk is aan $2n-5=4023$. $\square$

Opgave 5. Vind alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ zodat $f(1) = 2$ en zodat voor alle $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat $\min(2m + 2n, f(m + n) + 1)$ deelbaar is door $\max(f(m) + f(n), m + n)$.

Oplossing. Invullen van $m = n$ geeft dat $\min(4n, f(2n)+1)$ deelbaar is door $\max(2f(n), 2n)$. Een getal hoogstens gelijk aan $4n$ is dus deelbaar door een getal minstens gelijk aan $2f(n)$. Daaruit volgt $4n \geq 2f(n)$, dus $f(n) \leq 2n$ voor alle n.
Invullen van $m = n = 1$ geeft dat $\min(4, f(2) + 1)$ deelbaar is door $\max(2f(1), 2) = \max(4, 2) = 4$. Dus $\min(4, f(2) + 1)$ kan niet kleiner dan 4 zijn, dus $f(2) + 1 \geq 4$. Maar we hebben net ook al gezien dat $f(2) \leq 2 \cdot 2 = 4$, dus $f(2) = 3$ of $f(2) = 4$.
Stel eerst dat $f(2) = 3$. We bewijzen met inductie naar n dat $f(n) = n + 1$ voor alle n. Stel namelijk dat dit waar is voor $n = r - 1$ voor zekere $r \geq 3$ en vul in $m = 1$ en $n = r - 1$. Dan krijgen we dat $\min(2r, f(r) + 1)$ deelbaar is door $\max(f(1) + f(r-1), r) = \max(r + 2, r) = r + 2$. Aangezien $\min(2r, f(r) + 1) \leq 2r < 2(r + 2)$ moet er gelden dat $\min(2r, f(r) + 1) = r + 2$. Omdat $r \geq 3$ is $2r > r + 2$, dus er geldt $f(r) + 1 = r + 2$ oftewel $f(r) = r + 1$. Dit voltooit de inductie. We krijgen dus de kandidaatfunctie $f(n) = n + 1$. We controleren meteen of deze functie voldoet. Er geldt dan voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ dat $\min(2m + 2n, f(m + n) + 1) = \min(2m + 2n, m + n + 2) = m + n + 2$ omdat $m, n \geq 1$, en $\max(f(m) + f(n), m + n) = \max(m + n + 2, m + n) = m + n + 2$. Het eerste is deelbaar door het tweede (want gelijk aan het tweede), dus deze functie voldoet.
Stel nu dat $f(2) = 4$. We bewijzen met inductie naar n dat $f(n) = 2n$ voor alle n. Stel namelijk dat dit waar is voor $n = r - 1$ voor zekere $r \geq 3$. We bewijzen dat ook $f(r) = 2r$. Vul eerst $m = 1$ en $n = r - 1$ in. Dan vinden we dat $\min(2r, f(r) + 1)$ deelbaar is door $\max(f(1)+f(r-1), 1+r-1) = \max(2r, r) = 2r$. Dus $\min(2r, f(r)+1)$ kan niet kleiner dan $2r$ zijn, dus $f(r) \geq 2r - 1$. Maar we wisten ook al dat $f(r) \leq 2r$, dus $f(r) \in \{2r - 1, 2r\}$. Veronderstel dat $f(r) = 2r - 1$. Vul dan $m = 1$ en $n = r$ in. Dan vinden we dat $\min(2(r + 1), f(r+1) + 1)$ deelbaar is door $\max(f(1) + f(r), 1 + r) = \max(2 + 2r - 1, r + 1) = 2r + 1$. Omdat $2r + 1 \nmid 2(r+1)$, kan $2(r+1)$ niet het minimum zijn, dus moet $f(r+1) + 1 < 2r + 2$ en het moet ook deelbaar zijn door $2r + 1$, dus $f(r + 1) = 2r$. Vul ook $m = 2$ en $n = r - 1$ in. Dan vinden we dat $\min(2(r + 1), f(r + 1) + 1) = \min(2r + 2, 2r + 1) = 2r + 1$ deelbaar is door $\max(f(2) + f(r - 1), 1 + r) = \max(4 + 2r - 2, r + 1) = 2r + 2$, tegenspraak. We concluderen dat $f(r) = 2r$, waarmee de inductie voltooid is. We krijgen hiermee de kandidaatfunctie $f(n) = 2n$ voor alle n. We controleren of deze functie voldoet. Voor alle m, n geldt dan dat $\min(2m + 2n, f(m + n) + 1) = \min(2m + 2n, 2m + 2n + 1) = 2m + 2n$ en $\max(f(m) + f(n), m + n) = \max(2m + 2n, m + n) = 2m + 2n$. Het eerste is deelbaar door het tweede (want gelijk aan het tweede), dus deze functie voldoet.
We concluderen dat er precies twee oplossingen zijn: de functie $f(n) = n + 1$ voor alle n en de functie $f(n) = 2n$ voor alle n. $\square$