IMO-selectietoets II

zaterdag 6 juni 2015

Opgave 1. Laat a en b twee positieve gehele getallen zijn die voldoen aan $\text{ggd}(a, b) = 1$. Beschouw een pion die op roosterpunt (x, y) staat. Een stap van type A bestaat uit het verplaatsen van de pion naar één van de volgende velden: $(x+a, y+a), (x+a, y-a), (x-a, y+a)$ of $(x-a, y-a)$. Een stap van type B bestaat uit het verplaatsen van de pion naar $(x+b, y+b), (x+b, y-b), (x-b, y+b)$ of $(x-b, y-b)$.
Zet nu een pion op $(0, 0)$. Je mag een (eindig) aantal stappen uitvoeren, en wel om en om stappen van type A en type B, beginnend met een stap van type A. Je mag een even aantal of een oneven aantal stappen uitvoeren, dus de laatste stap mag zowel van type A als van type B zijn. Bepaal de verzameling van alle roosterpunten (x, y) die je met zo'n serie van stappen kunt bereiken.

Opgave 2. Bepaal alle positieve gehele getallen n waarvoor er positieve gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan met

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n = 6n$$

en

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \ldots + \frac{n}{a_n} = 2 + \frac{1}{n}.$$

Opgave 3. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC. Op de lijn door B evenwijdig aan AC ligt een punt D, zodat D en C aan dezelfde kant van lijn AB liggen. De middelloodlijn van CD snijdt de lijn AB in E. Bewijs dat driehoek CDE gelijkzijdig is.

Opgave 4. Je mag elk van de getallen 1 tot en met 2014 een kleur geven, waarbij precies de helft rood moet worden en de andere helft blauw. Vervolgens bekijk je het aantal k van positieve gehele getallen die te schrijven zijn als de som van een rood en een blauw getal. Bepaal de maximale waarde van k die je kunt bereiken.

Opgave 5. Vind alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ zodat $f(1) = 2$ en zodat voor alle $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat $\min(2m + 2n, f(m+n) + 1)$ deelbaar is door $\max(f(m) + f(n), m + n)$.