IMO-selectietoets I

vrijdag 5 juni 2015

Uitwerkingen

Opgave 1. Voor vierhoek $ABCD$ geldt $\angle A = \angle C = 90°$. Zij E een punt binnen de vierhoek. Zij M het midden van BE. Bewijs dat $\angle ADB = \angle EDC$ dan en slechts dan als $|MA| = |MC|$.

Oplossing. Zij N het midden van BD. Wegens Thales gaat de cirkel met middellijn BD ook door A en C en punt N is hiervan het middelpunt. Verder geldt dat $MN \parallel DE$: als E niet op BD ligt, is MN een middenparallel in driehoek BDE, en als E wel op BD ligt, dan zijn MN en DE dezelfde lijn.
De bewering $|AM| = |CM|$ is equivalent met dat M op de middelloodlijn van AC ligt. Omdat die middelloodlijn door het middelpunt N van de cirkel gaat, is dit dus equivalent met de bewering $MN \perp AC$. En dat is het geval dan en slechts dan als $DE \perp AC$. Noem T het snijpunt van DE en AC, dan geldt dus: $|AM| = |CM|$ dan en slechts dan als $\angle DTC = 90°$.
Met de hoekensom vinden we $\angle DTC = 180° - \angle TDC - \angle DCT = 180° - \angle EDC - \angle DCA$. Er geldt $\angle DCA = 90° - \angle ACB = 90° - \angle ADB$, waarbij we voor de laatste gelijkheid de koordenvierhoek $ABCD$ hebben gebruikt. Dus $\angle DTC = 180° - \angle EDC - (90° - \angle ADB) = 90° - \angle EDC + \angle ADB$. Nu volgt onmiddelijk dat $\angle ADB = \angle EDC$ dan en slechts dan als $\angle DTC = 90°$ en we hadden al gezien dat dat laatste equivalent was met $|AM| = |CM|$.
Merk op dat dit bewijs geldt in iedere configuratie. $\square$

Opgave 2. Bepaal alle polynomen $P(x)$ met reële coëfficiënten waarvoor het polynoom

$$Q(x) = (x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

constant is.

Oplossing I. Stel dat $P(x)$ een constant polynoom is, zeg $P(x) = a$ met $a \in \mathbb{R}$. Dan is

$$Q(x) = (x+1)a - (x-1)a = ax + a - ax + a = 2a,$$

en dat is constant. Dus elk constant polynoom $P(x)$ voldoet.
We nemen nu verder aan dat P niet constant is. We kunnen dan schrijven $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ met $n \geq 1$ en $a_n \neq 0$. Bekijk de coëfficiënt van x^n in $Q(x)$. Deze is de som van de coëfficiënten van x^n in $xP(x-1)$, $P(x-1)$, $-xP(x)$ en $P(x)$. In de eerste is deze coëfficiënt gelijk aan $a_{n-1} - na_n$, in de tweede aan a_n, in de derde aan $-a_{n-1}$ en in de vierde aan a_n. Samen is dat

$$a_{n-1} - na_n + a_n - a_{n-1} + a_n = (2-n)a_n.$$

Maar in $Q(x)$ moet deze coëfficiënt gelijk zijn aan 0. Omdat $a_n \neq 0$, volgt hieruit $n = 2$. Dus $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ met $a_2 \neq 0$.
Bekijk nu de constante coëfficiënt van $Q(x)$. Deze is de som van de constante coëfficiënten van $xP(x-1)$, $P(x-1)$, $-xP(x)$ en $P(x)$. Dit zijn achtereenvolgens 0, $a_2 - a_1 + a_0$, 0 en a_0. Samen is dat $a_2 - a_1 + 2a_0$. Anderzijds kunnen we $Q(1)$ uitrekenen:

$$Q(1) = 2P(0) - 0 = 2a_0.$$

Omdat Q constant is, is $Q(1)$ gelijk aan de constante coëfficiënt van Q, dus $2a_0 = a_2 - a_1 + 2a_0$. We zien dat $a_2 = a_1$. Dus $P(x)$ is van de vorm $P(x) = bx^2 + bx + a = bx(x+1) + a$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$. Om te kijken of alle polynomen van deze vorm voldoen, vullen we dit in:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (x+1)\big(b(x-1)x + a\big) - (x-1)(bx(x+1) + a) \\
&= (x-1)x(x+1)b + (x+1)a - (x-1)x(x+1)b - (x-1)a \\
&= 2a.
\end{aligned}$$

Dat is inderdaad constant, dus alle polynomen van deze vorm voldoen. In feite is elk constant polynoom ook van deze vorm, maar dan met $b = 0$. We concluderen dat de oplossingen zijn: alle polynomen van de vorm $P(x) = bx^2 + bx + a$ met $a, b \in \mathbb{R}$. □

Oplossing II. Er geldt

$$Q(1) = 2P(0) - 0 = 2P(0)$$

en

$$Q(-1) = 0 - -2P(-1) = 2P(-1).$$

Omdat Q constant is, volgt hieruit $P(0) = P(-1)$. Schrijf $P(0) = c$ en bekijk het polynoom $P(x) - c$. Dit polynoom heeft nulpunten bij $x = 0$ en $x = -1$, dus

$$P(x) - c = x(x+1)R(x)$$

voor een zeker polynoom $R(x)$ met reële coëfficiënten. Dus $P(x) = x(x+1)R(x) + c$ en dit vullen we in:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+1)\big((x-1)xR(x-1) + c\big) - (x-1)\big(x(x+1)R(x) + c\big) \\ &= (x-1)x(x+1)R(x-1) + (x+1)c - (x-1)x(x+1)R(x) - (x-1)c \\ &= (x-1)x(x+1)\big(R(x-1) - R(x)\big) + 2c. \end{aligned}$$

Dit moet constant zijn, dus $R(x-1) - R(x)$ moet het nulpolynoom zijn. Dus $R(x-1) = R(x)$ voor alle x. In het bijzonder geldt $R(0) = R(1) = R(2) = \ldots$, dus R neemt dezelfde waarde aan op oneindig veel punten. Dat betekent dat R gelijk moet zijn aan een constant polynoom, zeg $R(x) = d$. Dan geldt

$$P(x) = x(x+1)d + c = dx^2 + dx + c.$$

Net als in de eerste oplossing controleren we dat alle polynomen van deze vorm, met $c, d \in \mathbb{R}$, voldoen. $\square$

Oplossing III. We noemen $p = P(1)$ en q de constante waarde die $Q(x)$ aanneemt. We bewijzen met inductie naar m dat $P(m) = \frac{1}{2}m(m+1)p - (\frac{1}{2}m(m+1) - 1) \cdot \frac{q}{2}$ voor alle gehele $m \geq 1$.
Voor $m = 1$ staat er $P(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot p - (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 1) \cdot \frac{q}{2} = p - 0 = P(1)$, dus dat klopt. Zij nu $k \geq 1$ en neem aan dat we de claim bewezen hebben voor $m = k$. Uit de gegeven vergelijking volgt voor $x \neq 1$:

$$P(x) = \frac{(x+1)P(x-1) - q}{x-1}.$$

Vul nu $x = k + 1$ in (merk op dat $x \neq 1$, want $k \geq 1$):

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{(k+2)P(k) - q}{k} \\ &= \frac{(k+2) \cdot \big(\frac{1}{2}k(k+1)p - (\frac{1}{2}k(k+1) - 1) \cdot \frac{q}{2}\big) - q}{k} \\ &= (k+2) \cdot \big(\tfrac{1}{2}(k+1)p - (\tfrac{1}{2}(k+1) - \frac{1}{k}) \cdot \tfrac{q}{2}\big) - \tfrac{q}{k} \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2)p - \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2) \cdot \tfrac{q}{2} + \tfrac{k+2}{k} \cdot \tfrac{q}{2} - \tfrac{q}{k} \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2)p - \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2) \cdot \tfrac{q}{2} + \tfrac{q}{2} + \tfrac{2}{k} \cdot \tfrac{q}{2} - \tfrac{q}{k} \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2)p - \big(\tfrac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1\big) \cdot \tfrac{q}{2}. \end{aligned}$$

Dit voltooit de inductiestap.
Dus $P(x)$ valt op oneindig veel punten (namelijk alle positieve gehele getallen) samen met het polynoom $\frac{1}{2}x(x+1)p-(\frac{1}{2}x(x+1)-1)\cdot\frac{q}{2}$. Daarom moet hij gelijk zijn aan dit polynoom. Als we dit herschrijven tot de standaardnotatie, krijgen we

$$P(x) = (\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{4}q) \cdot x^2 + (\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{4}q) \cdot x + \tfrac{q}{2}.$$

Dit is van de vorm $P(x) = bx^2 + bx + a$ met a en b constanten in $\mathbb{R}$. Net als in de eerste oplossing controleren we dat alle polynomen van deze vorm voldoen. $\square$

Opgave 3. Zij n een positief geheel getal. We bekijken rijtjes getallen a_0, a_1, …, a_k en b_0, b_1, …, b_k die voldoen aan $a_0 = b_0 = 1$ en $a_k = b_k = n$ en waarbij voor elke i met $1 \leq i \leq k$ geldt dat (a_i, b_i) gelijk is aan ofwel $(1 + a_{i-1}, b_{i-1})$ ofwel $(a_{i-1}, 1 + b_{i-1})$. Definieer voor $1 \leq i \leq k$ het getal

$$c_i = \begin{cases} a_i & \text{als } a_i = a_{i-1}, \\ b_i & \text{als } b_i = b_{i-1}. \end{cases}$$

Bewijs dat $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = n^2 - 1$.

Oplossing I. We bewijzen met inductie naar j dat $c_1 + \ldots + c_j = a_j b_j - 1$. Voor $j = 1$ staat hier $c_1 = a_1 b_1 - 1$ en dat is waar aangezien $(a_1, b_1) \in \{(1,2), (2,1)\}$. Stel nu dat $c_1 + \ldots + c_{i-1} = a_{i-1} b_{i-1} - 1$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $(a_i, b_i) = (a_{i-1}, 1 + b_{i-1})$, zodat $a_i = a_{i-1}$ en dus $c_i = a_{i-1}$. Er geldt nu

$$(c_1 + \ldots + c_{i-1}) + c_i = (a_{i-1} b_{i-1} - 1) + a_{i-1} = a_{i-1}(b_{i-1} + 1) - 1 = a_i b_i - 1,$$

wat de inductie voltooit. Voor $j = k$ zien we nu dat $c_1 + \ldots + c_k = a_k b_k - 1 = n^2 - 1$. $\square$

Oplossing II. We definiëren een rijtje van k letters: de i-de letter in het rijtje is gelijk aan A als $a_i = 1 + a_{i-1}$ en gelijk aan B als $b_i = 1 + b_{i-1}$. Omdat de rijtjes a_i en b_i beide van 1 naar n gaan, moet er $n - 1$ keer een A staan en $n - 1$ keer een B. Als voor zekere i de i-de letter gelijk is aan A, dan is $c_i = b_i$ en dat is gelijk aan 1 plus het aantal letters B dat eerder in het rijtje staat (want $b_0 = 1$ en voor elke B is b_j met 1 omhoog gegaan en bij elke A is b_j niet veranderd). En andersom geldt dat als de i-de letter een B is, dan c_i gelijk is aan 1 plus het aantal letters A dat eerder in het rijtje staat.
Bekijk nu een *oude situatie* met de i-de letter gelijk aan A en de $i + 1$-ste letter gelijk aan B en een *nieuwe situatie* waarin dit precies andersom is. De c_j die hoort bij de letter A is in de nieuwe situatie 1 groter dan in de oude, omdat er een keer B extra voorafgaat aan de A. De c_j die hoort bij de letter B is juist 1 kleiner geworden. De rest van de c_j's is ongewijzigd, dus de som van de c_j's is ook ongewijzigd. Een verwisseling van AB naar BA heeft dus geen invloed op de som van de c_j's. We kunnen nu net zo lang AB vervangen door BA tot het letterrijtje bestaat uit eerst $n - 1$ keer B en daarna $n - 1$ keer A. De bijbehorende c_j's zijn dan achtereenvolgens 1, 1, …, 1, n, n, …, n, waarbij de 1 precies $n - 1$ keer voorkomt en de n ook. De som hiervan is $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ en dat geldt dus ook voor de som van c_j's in het oorspronkelijke rijtje. $\square$

Oplossing III. We definiëren een rijtje van k letters: de i-de letter in het rijtje is gelijk aan A als $a_i = 1 + a_{i-1}$ en gelijk aan B als $b_i = 1 + b_{i-1}$. Verder definiëren we voor $1 \leq i \leq k$

$$d_i = \begin{cases} b_i & \text{als } a_i = a_{i-1}, \\ a_i & \text{als } b_i = b_{i-1}. \end{cases}$$

Als voor zekere i de i-de letter gelijk is aan A, dan is $d_i = a_i$ en dat is gelijk aan 1 plus het aantal letters A dat tot en met deze plek in het rijtje staat (want $a_0 = 1$ en voor elke A is a_j met 1 omhoog gegaan en bij elke B is a_j niet veranderd). De d_i die corresponderen met de plekken waar een A staat, zijn dus precies de getallen 2 tot en met n. De d_i die corresponderen met de plekken waar een B staat, zijn ook precies de getallen 2 tot en met n. Dus de som van alle d_i is gelijk aan $(n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$.
Voor elke i geldt $c_i + d_i = a_i + b_i = 1 + (a_{i-1} + b_{i-1})$ en $c_1 + d_1 = 1 + 2 = 3$, dus met een simpele inductie $c_i + d_i = i + 2$. De totale som van alle c_i en d_i bij elkaar is dus $3 + 4 + \ldots + 2n = \frac{1}{2}(2n+3)(2n-2) = (2n+3)(n-1) = 2n^2 + n - 3$. We concluderen dat de som van de c_i gelijk is aan $(2n^2 + n - 3) - (n^2 + n - 2) = n^2 - 1$. $\square$

Opgave 4. Laat cirkels Γ_1 en Γ_2, met middelpunten respectievelijk O_1 en O_2, elkaar snijden in twee verschillende punten A en B. De lijn O_1A snijdt Γ_2 nogmaals in C en de lijn O_2A snijdt Γ_1 nogmaals in D. De lijn door B evenwijdig met AD snijdt Γ_1 nogmaals in E. Veronderstel dat O_1A evenwijdig is met DE. Bewijs dat CD loodrecht op O_2C staat.

Oplossing I. In alle oplossingen bekijken we de configuratie waarin A, B, E en D in die volgorde op een cirkel liggen, O_1, A en C in die volgorde op een lijn en O_2, A en D in die volgorde op een lijn. De andere configuraties gaan analoog.
Vanwege koordenvierhoek $ABED$ geldt $\angle BED = 180° - \angle DAB$. Verder geldt wegens de twee evenwijdigheden dat $\angle BED = \angle DAO_1$ en omdat $|O_1A| = |O_1D|$ geldt $\angle DAO_1 = \angle ADO_1$. We concluderen dat $180° - \angle DAB = \angle ADO_1$. Met U-hoeken volgt nu dat DO_1 en AB evenwijdig zijn.
We hadden al gezien dat $\angle ADO_1 = \angle DAO_1$. Vanwege overstaande hoeken en het feit dat $|O_2A| = |O_2C|$ geldt $\angle DAO_1 = \angle O_2AC = \angle O_2CA$. Dus $\angle O_2DO_1 = \angle ADO_1 = \angle O_2CA = \angle O_2CO_1$, wat betekent dat O_1DCO_2 een koordenvierhoek is.
De lijn O_1O_2 is de middelloodlijn van AB en staat dus ook loodrecht op DO_1, omdat die evenwijdig aan AB is. Dus $\angle O_2O_1D = 90°$. Omdat O_1DCO_2 een koordenvierhoek is, is nu ook $\angle O_2CD = 90°$. $\square$

Oplossing II. Noem $\alpha = \angle DEB$. Zij S het snijpunt van BE en AC, zodat $ESAD$ een parallellogram is. Dus is $\angle DAO_1 = \angle DAS = \angle DES = \angle DEB = \alpha$. Omdat driehoek AO_1D gelijkbenig is met top O_1, geldt $\angle O_1AD = \angle DAO_1 = \alpha$. Wegens overstaande hoeken en de gelijkbenigheid van $\triangle CO_2A$ geldt nu ook $\angle O_2CA = \angle CAO_2 = \angle O_1AD = \alpha$. Wegens koordenvierhoek $BADE$ geldt verder $\angle O_2AB = 180° - \angle DAB = \angle DEB = \alpha$, en vanwege de gelijkbenigheid van $\triangle AO_2B$ geldt ook $\angle O_2BA = \angle O_2AB = \alpha$. Nu zijn $\triangle AO_2B$ en $\triangle AO_2C$ twee driehoeken met twee hoeken gelijk aan α en een gemeenschappelijke zijde AO_2, dus ze zijn congruent (ZHH), waaruit volgt $|AB| = |AC|$.
Een koordenvierhoek met twee evenwijdige zijden is een gelijkbenig trapezium (stelling van Julian) dus $|DE| = |AB|$. Samen met de vorige gelijkheid krijgen we nu $|DE| = |AC|$. Omdat DE en AC ook evenwijdig zijn, vinden we een parallellogram $ACDE$. Dit betekent dat $\angle DCA = \angle AED$. Wegens de middelpunt-omtrekhoekstelling geldt $\angle AED = \frac{1}{2}\angle AO_1D = 90° - \angle O_1AD = 90° - \alpha$. Dus $\angle DCA = 90° - \alpha$. Nu is $\angle DCO_2 = \angle DCA + \angle O_2CA = 90° - \alpha + \alpha = 90°$, wat we moesten bewijzen. $\square$

Oplossing III. Zij S het snijpunt van BE en AC, zodat $ESAD$ een parallellogram is. Zij T het snijpunt van BE en CO_2. Er geldt $\angle CST = \angle ASB = \angle DAS$ vanwege $BE \parallel AD$ en $\angle DAS = \angle O_2AC = \angle O_2CA = \angle TCS$ omdat $|O_2A| = |O_2C|$. Dus $\angle CST = \angle TCS$, wat betekent dat $|TS| = |TC|$. Verder is nu $\angle BTC = \angle STC = 180° - 2\angle O_2CA$. Daarnaast hadden we al gezien dat $\angle O_2CA = \angle O_2AC = \angle DAS$. Vanwege het parallellogram geldt $\angle DAS = \angle DES = \angle DEB = 180° - \angle DAB = \angle O_2AB$. Dus $\angle O_2CA = \angle O_2AB$. Hiermee zien we dat $\angle BTC = 180° - 2\angle O_2CA = 180° - \angle O_2AC - \angle O_2AB = 180° - \angle BAC$.

Dus $BACT$ is een koordenvierhoek, oftewel T ligt op Γ_2. Wegens Thales vinden we nu $\angle TAC = 90°$. Maar TSC is gelijkbenig en de lijn TA is een hoogtelijn vanuit de top, dus ook een zwaartelijn. Dus A is het midden van SC.
Een koordenvierhoek met twee evenwijdige zijden is een gelijkbenig trapezium (stelling van Julian) dus $|DE| = |AB|$. Vanwege het parallellogram is ook $|DE| = |SA|$, dus $|AB| = |SA| = |AC|$. Dus A ligt op de middelloodlijn van BC. Die middelloodlijn gaat ook door het middelpunt van de cirkel waar BC een koorde van is en is dus de lijn O_2A. Dus D ligt ook op deze middelloodlijn, zodat $|DC| = |DB|$. In het bijzonder is nu zwaartelijn DA in driehoek BCD ook een bissectrice, dus $\angle CDB = 2\angle ADB$. Met de middelpuntsomtrekshoekstelling is ook $\angle AO_1B = 2\angle ADB$. Dus driehoeken CDB en AO_1B zijn gelijkbenig met dezelfde tophoek, waardoor ze gelijkvormig zijn. Dus $\angle O_1AB = \angle DCB$. Omdat met de omtrekshoekstelling geldt $\angle BAT = \angle BCT$, geldt nu

$$\angle DCO_2 = \angle DCT = \angle DCB + \angle BCT = \angle O_1AB + \angle BAT = \angle O_1AT = 90°.$$

$\square$

Opgave 5. Voor een positief geheel getal n definiëren we D_n als het grootste getal dat een deler is van $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$ voor alle positieve gehele a.

a) Bewijs dat voor elke positieve gehele n het getal D_n van de vorm 3^k is met $k \geq 0$.

b) Bewijs dat er voor elke $k \geq 0$ een positieve gehele n bestaat zodat $D_n = 3^k$.

Oplossing.

a) Zij p een priemgetal en stel dat p een deler is van D_n. Dan is p een deler van

$$\big((a+1)^n + (a+2)^n + (a+3)^n\big) - \big(a^n + (a+1)^n + (a+2)^n\big) = (a+3)^n - a^n$$

voor alle positieve gehele a. Kies nu $a = p$, dan $p \mid (p+3)^n - p^n$, oftewel $(p+3)^n - p^n \equiv 0 \mod p$. Hier staat gewoon $3 \equiv 0 \mod p$, dus $p = 3$. We concluderen dat D_n alleen priemfactoren 3 bevat en dus van de vorm 3^k is met $k \geq 0$.

b) Voor $k = 0$ nemen we $n = 2$. Er geldt $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ en $2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$ en die twee hebben geen enkele priemfactor gemeenschappelijk, dus $D_2 = 1$. Neem nu verder aan dat $k \geq 1$. We gaan bewijzen dat $D_n = 3^k$ voor $n = 3^{k-1}$.

Eerst laten we zien dat $1^n + 2^n + 3^n$ voor $n = 3^{k-1}$ deelbaar is door 3^k, maar niet door 3^{k+1}. Voor $k = 1$ is $n = 1$ en geldt inderdaad dat $1 + 2 + 3 = 6$ deelbaar is door 3, maar niet door 3^2. Voor $k \geq 2$ geldt dat $n > k$ en dus dat 3^n deelbaar is door 3^{k+1}. Het te bewijzen is dus equivalent aan: $1 + 2^n$ voor $n = 3^{k-1}$ is deelbaar door 3^k maar niet door 3^{k+1}. We bewijzen dit met inductie naar k. Voor $k = 2$ is $n = 3$ en geldt inderdaad dat $1 + 8 = 9$ deelbaar is door 9, maar niet door 27. Zij $m \geq 2$ en stel dat we dit hebben bewezen voor $k = m$. Neem $n = 3^{m-1}$. We weten dat $1 + 2^n$ deelbaar is door 3^m, maar niet door 3^{m+1}. We willen laten zien dat $1 + 2^{3n}$ deelbaar is door 3^{m+1}, maar niet door 3^{m+2}. Schrijf $1 + 2^n = 3^m c$ met $3 \nmid c$. Dan is $2^n = 3^m c - 1$, dus

$$1 + 2^{3n} = 1 + (3^m c - 1)^3 = 3^{3m} c^3 - 3 \cdot 3^{2m} c^2 + 3 \cdot 3^m c.$$

Modulo 3^{m+2} is dit congruent aan $3^{m+1} c$ en omdat $3 \nmid c$ volgt hieruit dat dit deelbaar is door 3^{m+1}, maar niet door 3^{m+2}, zoals we wilden bewijzen. Dit voltooit de inductie.

Nu laten we zien dat voor $n = 3^{k-1}$ geldt dat $(a+3)^n - a^n$ deelbaar is door 3^k voor alle positieve gehele a. We bewijzen dit weer met inductie naar k. Voor $k = 1$ is $n = 1$ en geldt inderdaad dat $(a+3) - a = 3$ deelbaar is door 3. Zij nu $m \geq 1$ en neem aan dat we dit bewezen hebben voor $k = m$. Neem $n = 3^{m-1}$. Dan weten we dat $(a+3)^n - a^n$ deelbaar is door 3^m, dus we kunnen schrijven $(a+3)^n = a^n + 3^m c$ voor een zekere gehele c. Links en rechts de derde macht nemen geeft dan

$$(a+3)^{3n} = a^{3n} + 3a^{2n} \cdot 3^m c + 3a^n \cdot 3^{2m} c^2 + 3^{3m} c^3,$$

dus

$$(a+3)^{3n} - a^{3n} = a^{2n} \cdot 3^{m+1} c + a^n \cdot 3^{2m+1} c^2 + 3^{3m} c^3.$$

Dit is deelbaar door 3^{m+1}, wat de inductie voltooit.

We hebben nu voor $n = 3^{k-1}$ bewezen dat $3^k \mid 1^n + 2^n + 3^n$ en $3^k \mid (a+3)^n - a^n$ voor alle positieve gehele a, waaruit met inductie naar a direct volgt dat $3^k \mid a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$ voor alle a. Dus $3^k \mid D_n$. Omdat $3^{k+1} \nmid 1^n + 2^n + 3^n$ geldt ook $3^{k+1} \nmid D_n$. Dus $D_n = 3^k$.

$\square$