NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets I

vrijdag 5 juni 2015

Opgave 1. Voor vierhoek $ABCD$ geldt $\angle A = \angle C = 90°$. Zij E een punt binnen de vierhoek. Zij M het midden van BE. Bewijs dat $\angle ADB = \angle EDC$ dan en slechts dan als $|MA| = |MC|$.

Opgave 2. Bepaal alle polynomen $P(x)$ met reële coëfficiënten waarvoor het polynoom

$$Q(x) = (x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

constant is.

Opgave 3. Zij n een positief geheel getal. We bekijken rijtjes getallen $a_0, a_1, \ldots, a_k$ en $b_0, b_1, \ldots, b_k$ die voldoen aan $a_0 = b_0 = 1$ en $a_k = b_k = n$ en waarbij voor elke i met $1 \leq i \leq k$ geldt dat (a_i, b_i) gelijk is aan ofwel $(1+a_{i-1}, b_{i-1})$ ofwel $(a_{i-1}, 1+b_{i-1})$. Definieer voor $1 \leq i \leq k$ het getal

$$c_i = \begin{cases} a_i & \text{als } a_i = a_{i-1}, \\ b_i & \text{als } b_i = b_{i-1}. \end{cases}$$

Bewijs dat $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = n^2 - 1$.

Opgave 4. Laat cirkels Γ_1 en Γ_2, met middelpunten respectievelijk O_1 en O_2, elkaar snijden in twee verschillende punten A en B. De lijn O_1A snijdt Γ_2 nogmaals in C en de lijn O_2A snijdt Γ_1 nogmaals in D. De lijn door B evenwijdig met AD snijdt Γ_1 nogmaals in E. Veronderstel dat O_1A evenwijdig is met DE. Bewijs dat CD loodrecht op O_2C staat.

Opgave 5. Voor een positief geheel getal n definiëren we D_n als het grootste getal dat een deler is van $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$ voor alle positieve gehele a.

a) Bewijs dat voor elke positieve gehele n het getal D_n van de vorm 3^k is met $k \geq 0$.

b) Bewijs dat er voor elke $k \geq 0$ een positieve gehele n bestaat zodat $D_n = 3^k$.