zaterdag 8 juli 2023

Opgave 1. Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 2$ die niet priem zijn en voldoen aan de volgende eigenschap: als $d_1, d_2, \dots, d_k$ alle positieve delers van n zijn, waarbij $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, dan is d_i een deler van $d_{i+1} + d_{i+2}$ voor elk geheel getal i met $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek met $|AB| < |AC|$. Zij Ω de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zij S het midden van de boog CB van Ω die A bevat. De loodlijn vanuit A op BC snijdt BS in D en snijdt Ω opnieuw in $E \neq A$. De (rechte) lijn door D evenwijdig met BC snijdt (rechte) lijn BE in L. Zij ω de omgeschreven cirkel van driehoek $\triangle BDL$. De cirkels ω en Ω snijden elkaar opnieuw in $P \neq B$.
Bewijs dat het snijpunt van de lijn BS en de raaklijn aan ω in P op de bissectrice van $\angle BAC$ ligt.

Opgave 3. Bepaal voor elk geheel getal $k \geqslant 2$ alle oneindige rijen van (strikt) positieve gehele getallen $a_1, a_2, \dots$ waarvoor er een polynoom (veelterm) P van de vorm

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

bestaat met $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ gehele getallen groter of gelijk 0 en

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

voor elk geheel getal $n \geqslant 1$.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.

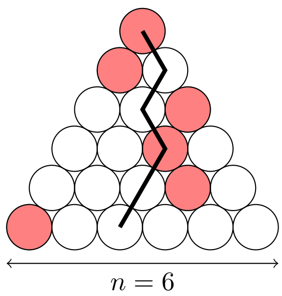
zondag 9 juli 2023

Opgave 4. Laat $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ paarsgewijs verschillende (strikt) positieve reële getallen zijn zodanig dat

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

een geheel getal is voor elke $n = 1, 2, \ldots, 2023$.
Bewijs dat $a_{2023} \geqslant 3034$.

Opgave 5. Zij n een (strikt) positief geheel getal. Een *Japanse driehoek* bestaat uit $1+2+\cdots+n$ cirkels die in de vorm van een gelijkzijdige driehoek liggen, zodanig dat voor elke $i = 1, 2, \ldots, n$, de i^{de} rij precies i cirkels bevat, waarvan precies één rood gekleurd is. Een *ninja-pad* in een Japanse driehoek is een opeenvolging van n cirkels, verkregen door te starten met de cirkel in de bovenste rij, dan herhaaldelijk van een cirkel naar een van de twee cirkels direct daaronder te gaan, en te eindigen met een cirkel in de onderste rij. Hier is een voorbeeld van een Japanse driehoek waarbij $n = 6$, met daarin een ninja-pad dat twee rode cirkels bevat.



Bepaal, als functie van n, de grootste k zodanig dat er in elke Japanse driehoek een ninja-pad is dat op zijn minst k rode cirkels bevat.

Opgave 6. Zij $\triangle ABC$ een gelijkzijdige driehoek. Laat A_1, B_1, C_1 inwendige punten van $\triangle ABC$ zijn zodat $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$, en

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

De (rechte) lijnen BC_1 en CB_1 snijden elkaar in het punt A_2, de lijnen CA_1 en AC_1 snijden elkaar in het punt B_2, en de lijnen AB_1 en BA_1 snijden elkaar in het punt C_2.
Bewijs: als driehoek $\triangle A_1B_1C_1$ niet gelijkbenig (en niet gelijkzijdig) is, dan gaan de omgeschreven cirkels van de driehoeken $\triangle AA_1A_2$, $\triangle BB_1B_2$ en $\triangle CC_1C_2$ alle drie door twee gemeenschappelijke punten.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.