Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 11 september 2020

Uitwerkingen

1. (a) Het kleinst mogelijke aantal omcirkelde getallen is 3. Dat het niet met minder kan, volgt uit het feit dat er in elke rij minstens één getal wordt omcirkeld (en dit zijn drie verschillende getallen).

Een mediaantabel waar maar 3 getallen zijn omcirkeld staat hiernaast. In de rijen worden de getallen $7, 5, 3$ omcirkeld, in de kolommen de getallen $3, 5, 7$ en op de diagonalen de getallen 5 en 5. Samen zijn dat drie verschillende getallen: 3, 5 en 7.

4	9	7
2	5	8
3	1	6

(b) Het grootst mogelijke aantal omcirkelde getallen is 7. Dat het niet meer kan zijn, volgt uit het feit dat de getallen 9 en 1 nooit omcirkeld worden. Er worden dus nooit meer dan $9 - 2 = 7$ getallen omcirkeld.

Een mediaantabel waarbij daadwerkelijk 7 getallen worden omcirkeld staat hiernaast. In de rijen worden de getallen $2, 6, 8$ omcirkeld, in de kolommen de getallen $7, 5, 3$ en op de diagonalen 4 en 5. Samen zijn dat de zeven getallen $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

4	1	2
7	5	6
8	9	3

2. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

(a) Als $a_1 = -3$, dan geldt $a_2 = \frac{a_1+a_1}{a_1+1} = \frac{-6}{-2} = 3$. Vervolgens berekenen we $a_3 = \frac{a_2+a_1}{a_2+1} = \frac{0}{4} = 0$. Daarna komt dan $a_4 = \frac{a_3+a_1}{a_3+1} = \frac{-3}{1} = -3$. We zien dus dat $a_4 = a_1$. Omdat a_{n+1} alleen van a_n en a_1 afhangt, zien we dat $a_5 = a_2 = 3$, $a_6 = a_3 = 0$, $a_7 = a_4 = -3$, enzovoorts. Met andere woorden: de rij is periodiek met periode 3 en we zien dat

$$a_{2020} = a_{2017} = a_{2014} = \cdots = a_4 = a_1 = -3.$$

(b) We gaan de stelling bewijzen met volledige inductie. We beginnen met het basisgeval $n = 2$. We berekenen $a_2 = \frac{a_1+a_1}{a_1+1} = \frac{4}{3}$ en zien dat inderdaad geldt dat $\frac{4}{3} \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}$.
Stel nu dat we voor zekere $n = k \geqslant 2$ bewezen hebben dat $\frac{4}{3} \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}$. We zullen bewijzen dat deze ongelijkheden ook gelden voor $n = k + 1$.
We merken eerst op dat

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 2}{a_k + 1} = 1 + \frac{1}{a_k + 1}.$$

Uit de inductiehypothese ($\frac{4}{3} \leqslant a_k \leqslant \frac{3}{2}$) volgt dat $\frac{7}{3} \leqslant a_k + 1 \leqslant \frac{5}{2}$ en dus dat

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{a_k + 1} \leqslant \frac{3}{7}.$$

Door bij elk lid van deze ongelijkheden 1 op te tellen vinden we nu

$$\frac{7}{5} \leqslant 1 + \frac{1}{a_k + 1} = a_{k+1} \leqslant \frac{10}{7}.$$

Omdat $\frac{4}{3} \leqslant \frac{7}{5}$ en $\frac{10}{7} \leqslant \frac{3}{2}$, zien we dat $\frac{4}{3} \leqslant a_{k+1} \leqslant \frac{3}{2}$, zoals we wilden bewijzen.

2. Versie voor klas 6

(a) Als eerste bekijken we voor welke startwaarden $a_1 > 0$ er geldt dat $\frac{4}{3} \leqslant a_2 \leqslant \frac{3}{2}$. Daarna zullen we bewijzen dat voor al deze startwaarden de ongelijkheden $\frac{4}{3} \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}$ ook gelden voor alle andere $n \geqslant 2$.

Merk op dat $a_2 = \frac{a_1+2}{a_1+1}$ en dat de noemer hiervan, $a_1 + 1$, positief is, aangezien $a_1 > 0$. De ongelijkheid
$$\frac{4}{3} \leqslant a_2 = \frac{a_1+2}{a_1+1} \leqslant \frac{3}{2},$$
is dus equivalent met de ongelijkheid
$$\tfrac{4}{3}(a_1+1) \leqslant a_1 + 2 \leqslant \tfrac{3}{2}(a_1+1),$$
want je kunt alle leden in de ongelijkheid vermenigvuldigen met het positieve getal $a_1 + 1$. Als we vervolgens van alle leden van de ongelijkheid $a_1 + 2$ aftrekken, zien we dat dit equivalent is met
$$\tfrac{1}{3}a_1 - \tfrac{2}{3} \leqslant 0 \leqslant \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}.$$
We willen dus dat $\frac{1}{3}a_1 \leqslant \frac{2}{3}$, oftewel $a_1 \leqslant 2$, en dat $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}a_1$, oftewel $1 \leqslant a_1$. De startwaarde a_1 moet dus voldoen aan $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$.

Stel nu dat $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$, zodat a_2 voldoet aan $\frac{4}{3} \leqslant a_2 \leqslant \frac{3}{2}$. Als we nu naar a_3 kijken, dan zien we dat $a_3 = \frac{a_2+2}{a_2+1}$. Dat is precies dezelfde uitdrukking als die voor a_2, alleen dan met a_2 in plaats van a_1. Omdat a_2 ook voldoet aan $1 \leqslant a_2 \leqslant 2$, volgt met hetzelfde argument ook dat $\frac{4}{3} \leqslant a_3 \leqslant \frac{3}{2}$.

We kunnen dit argument herhalen om dit ook te bewijzen voor a_4, a_5, enzovoorts. We vinden dus dat voor alle $n \geqslant 2$ geldt dat $\frac{4}{3} \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}$. Het formele bewijs gaat natuurlijk met volledige inductie: het basisgeval $n = 2$ hebben we hierboven gezien. Voor het bewijs van de inductiestap, verwijzen we je naar de uitwerking van onderdeel (b) van de versie voor klas 5 & klas 4 en lager. De conclusie is dat de gevraagde ongelijkheden precies gelden als $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$.

(b) Allereerst berekenen we de eerste paar waarden van de rij in termen van a_1. We zien dat
$$a_2 = \frac{a_1-3}{a_1+1} \quad \text{en} \quad a_3 = \frac{a_2-3}{a_2+1} = \frac{\frac{a_1-3}{a_1+1} - 3}{\frac{a_1-3}{a_1+1} + 1} = \frac{a_1 - 3 - 3(a_1+1)}{a_1 - 3 + (a_1+1)} = \frac{-2a_1-6}{2a_1-2} = \frac{-a_1-3}{a_1-1}.$$
Hierbij is het van belang dat we niet door nul delen, oftewel dat $a_1 \neq -1$ en $a_2 \neq -1$. De eerste ongelijkheid volgt direct uit de aanname en voor de tweede ongelijkheid bekijken we wanneer $a_2 = -1$ geldt. Dat geldt precies dan als $a_1 - 3 = -(a_1 + 1)$, oftewel als $a_1 = 1$. Omdat we hebben aangenomen dat $a_1 \neq 1$, zien we dus dat $a_2 \neq -1$. De volgende term wordt dan
$$a_4 = \frac{a_3-3}{a_3+1} = \frac{\frac{-a_1-3}{a_1-1} - 3}{\frac{-a_1-3}{a_1-1} + 1} = \frac{-a_1 - 3 - 3(a_1-1)}{-a_1 - 3 + (a_1-1)} = \frac{-4a_1}{-4} = a_1.$$
Ook hier delen we niet door nul, omdat $a_3 = -1$ alleen geldt als $-a_1 - 3 = -a_1 + 1$, en dat geldt nooit.

We zien nu dat $a_4 = a_1$. Omdat a_{n+1} alleen van a_n afhangt, zien we dat $a_5 = a_2$, $a_6 = a_3$, $a_7 = a_4$, enzovoorts. Met andere woorden: de rij is periodiek met periode 3 en we zien dat
$$a_{2020} = a_{2017} = a_{2014} = \cdots = a_4 = a_1.$$
Ter conclusie: er geldt dus inderdaad dat $a_{2020} = a_1$ voor alle startwaarden a_1 ongelijk aan 1 en -1.

3. Versie voor klas 4 en lager

(a) Omdat AD en BC evenwijdig zijn, geldt wegens F-hoeken dat $\angle CMN = \angle DAM = \frac{1}{2}\angle DAB$. Omdat DN en AB evenwijdig zijn, geldt vanwege Z-hoeken dat $\angle CNM = \angle NAB = \frac{1}{2}\angle DAB$. De twee hoeken $\angle CMN$ en $\angle CNM$ zijn dus gelijk en driehoek CMN is daarom gelijkbenig met tophoek C. Hieruit volgt dat $|CM| = |CN|$. De lijnstukken OC, ON en OM zijn alle drie een straal van dezelfde cirkel en dus even lang. Driehoeken OCM en OCN zijn nu congruent met het ZZZ-criterium.

(b) Om te bewijzen dat $\angle OBC = \angle ODC$, gaan we bewijzen dat driehoeken OBC en ODN congruent zijn. We gaan dit bewijzen met het ZHZ-criterium. We zullen bewijzen dat $\angle OND = \angle OCB$ en $|ON| = |OC|$ en $|DN| = |BC|$.

De gelijkheid $|ON| = |OC|$ volgt, omdat ON en OC allebei de straal zijn van dezelfde cirkel. In onderdeel (a) zagen we dat de driehoeken OCM en OCN congruent zijn. Bovendien zijn deze twee driehoeken gelijkbenig ($|OC| = |OM|$ en $|OC| = |ON|$), dus de vier basishoeken $\angle ONC$, $\angle OCN$, $\angle OMC$ en $\angle OCM$ zijn gelijk. We zien dus dat $\angle OND = \angle OCB$. We moeten alleen nog bewijzen dat $|DN| = |BC|$.

We merken op dat $\angle BMA = \angle DAM$ (wegens Z-hoeken) en $\angle DAM = \angle MAB$ (omdat AM de bissectrice van hoek A is). We zien dus dat $\angle BMA = \angle MAB$. Driehoek AMB is dus gelijkbenig en er geldt dat $|AB| = |BM|$. Verder hadden we al gezien dat $|CM| = |CN|$ en hebben we ook nog $|AB| = |CD|$, omdat $ABCD$ een parallellogram is. We vinden dus dat

$$|DN| = |CD| + |CN| = |AB| + |CM| = |BM| + |CM| = |BC|,$$

precies zoals we wilden bewijzen.

3. Versie voor klas 5 & klas 6

Als tussenstap bewijzen we eerst dat driehoeken OCM en OCN congruent zijn. De oplossing voor de tussenstap kun je vinden bij onderdeel (a) van de versie voor klas 4 en lager. De rest van de oplossing kun je vinden bij onderdeel (b) van die versie.

4. Versie voor klas 4 en lager

We mogen wel aannemen dat $a \geqslant 0$. Als (x, y) een oplossing is, dan is $(-x, -y)$ ook een oplossing, dus we mogen in het vervolg aannemen dat $x + y \geqslant 0$ en aan het eind voor elke gevonden oplossing (x, y) de oplossing $(-x, -y)$ toevoegen.

We zien dat

$$p = (x + y)^2 - a^2 = (x + y + a)(x + y - a).$$

Hieruit volgt dat $x + y + a$ ongelijk aan nul is. Dus $x + y + a$ is positief en $x + y - a$ moet ook positief zijn. Het priemgetal p kan maar op twee manieren als product van twee positieve gehele getallen geschreven worden: $1 \cdot p$ en $p \cdot 1$. Aangezien $x + y + a \geqslant x + y - a$, volgt dat $x + y + a = p$ en $x + y - a = 1$. Tellen we deze twee vergelijkingen op, dan vinden we dat $2x + 2y = p + 1$. We weten ook dat $x^2 + y^2 + 1 = p + 1$, dus geldt $2x + 2y = x^2 + y^2 + 1$. Door alle termen naar de rechterkant te brengen en aan beide kanten 1 op te tellen vinden we

$$1 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

We hebben nu twee gehele kwadraten die bij elkaar opgeteld 1 zijn. Dat kan alleen als een van die twee kwadraten 0 is en het andere kwadraat 1 is, dus $(x - 1)^2 = 0$ en $(y - 1)^2 = 1$, of $(x - 1)^2 = 1$ en $(y - 1)^2 = 0$. In het eerste geval geldt $x - 1 = 0$ en $y - 1 = \pm 1$ zodat (x, y) gelijk is aan $(1, 2)$ of $(1, 0)$. In het tweede geval geldt $x - 1 = \pm 1$ en $y - 1 = 0$, zodat (x, y) gelijk is aan $(2, 1)$ of $(0, 1)$. Omdat $0^2 + 1^2 = 1$ geen priemgetal is, vallen $(1, 0)$ en $(0, 1)$ af als mogelijke oplossingen.

We bekijken nu of $(1, 2)$ en $(2, 1)$ wel oplossingen zijn. In beide gevallen vinden we $p = x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, en dat is inderdaad een priemgetal. Nemen we nu $a = 2$, dan geldt dat $(x + y)^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$ en dat is inderdaad gelijk aan p.

Toevoegen van de oplossingen waarbij x en y vervangen worden door $-x$ en $-y$ geeft in totaal dus vier oplossingen (x, y), namelijk

$$(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1).$$

4. Versie voor klas 5 & klas 6

We hebben $2xy = a^2$ met a een niet-negatief geheel getal en $x^2 + y^2 = p$ met p een priemgetal.

Omdat een priemgetal geen kwadraat kan zijn, volgt dat $x, y \neq 0$. Omdat $2xy$ een kwadraat is, volgt dat x en y allebei positief zijn, of allebei negatief. Als (x, y) een oplossing is, dan is $(-x, -y)$ ook een oplossing, dus we mogen in het vervolg aannemen dat x en y positief zijn en aan het eind voor elke gevonden oplossing (x, y) de oplossing $(-x, -y)$ toevoegen.

Combineren van $2xy = a^2$ en $x^2 + y^2 = p$ geeft $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = p + a^2$. Door a^2 naar de andere kant te brengen vinden we

$$p = (x + y)^2 - a^2 = (x + y + a)(x + y - a).$$

Omdat $x + y + a$ positief is, moet $x + y - a$ nu ook wel positief zijn. Het priemgetal p kan maar op twee manieren als product van twee positieve gehele getallen geschreven worden: $1 \cdot p$ en $p \cdot 1$. Aangezien $x + y + a \geqslant x + y - a$, volgt dat $x + y + a = p$ en $x + y - a = 1$.

Tellen we deze twee vergelijkingen op, dan vinden we dat $2x + 2y = p + 1$. We weten ook dat $x^2 + y^2 + 1 = p + 1$, dus geldt $2x + 2y = x^2 + y^2 + 1$. Door alle termen naar de rechterkant te brengen en aan beide kanten 1 op te tellen vinden we

$$1 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

We hebben nu twee gehele kwadraten die bij elkaar opgeteld 1 zijn. Dat kan alleen als een van die twee kwadraten 0 is en het andere kwadraat 1 is, dus $(x - 1)^2 = 0$ en $(y - 1)^2 = 1$, of $(x - 1)^2 = 1$ en $(y - 1)^2 = 0$. Omdat x en y positief zijn vinden we twee mogelijke oplossingen: $x = 1$ en $y = 2$, of $x = 2$ en $y = 1$. In beide gevallen geldt dat $2xy = 4$ een kwadraat is en dat $x^2 + y^2 = 5$ een priemgetal is. Beide mogelijkheden zijn dus inderdaad oplossingen.

Toevoegen van de oplossingen waarbij x en y negatief zijn geeft in totaal dus vier oplossingen (x, y), namelijk

$$(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1).$$

5. Stel dat Sabine op een zekere dag n^2 schelpen overhoudt, met $n > 1$. Dan geeft zij de volgende dag n schelpen weg en houdt dan $n^2 - n$ schelpen over. Dit is meer dan $(n - 1)^2$, want

$$(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 = (n^2 - n) - (n - 1) < n^2 - n$$

omdat $n > 1$. De dag daarna geeft zij dus $n-1$ schelpen weg en houdt er $n^2-n-(n-1) = (n-1)^2$ over, precies weer een kwadraat. De aantallen schelpen die Sabine overhoudt zijn dus afwisselend wel en geen kwadraat.

Laat d de eerste dag zijn waarop Sabine een kwadraat overhoudt, zeg n^2 schelpen. Dan zijn de dagen $d + 2, d + 4, \ldots, d + 18$ de tweede t/m de tiende dag dat zij een kwadraat overhoudt (namelijk $(n - 1)^2, (n - 2)^2, \ldots, (n - 9)^2$ schelpen). We concluderen dat $d + 18 = 28$ en dus $d = 10$.

Op dag 26 houdt ze nog minstens 1000 schelpen over, maar op dag 27 en 28 houdt ze minder dan 1000 schelpen over. We zien dus dat $(n - 9)^2 < 1000 \leqslant (n - 8)^2$. Omdat $31^2 < 1000 \leqslant 32^2$ zien we dat $n - 8 = 32$, en dus dat $n = 40$. Op dag 10 houdt Sabine dus voor het eerst een kwadraat over en dat kwadraat is 40^2.

In het vervolg van het bewijs zullen we de volgende observatie gebruiken.

Observatie. Als Sabine de dag met meer schelpen begint, dan houdt ze aan het eind van de dag ook meer (of evenveel) schelpen over.

Stel maar dat Sabine de dag met x schelpen begint, zeg $n^2 \leqslant x < (n + 1)^2$. Ze houdt dan $x - n$ schelpen over. Als ze met $x + 1$ schelpen was begonnen in plaats van x, dan had ze $x + 1 - n > x - n$ of $x + 1 - (n + 1) = x - n$ schelpen overgehouden.

We bekijken nu het aantal schelpen dat Sabina overhoudt op dag 8. Noem dit aantal x. De voor de hand liggende mogelijkheid $x = 41^2 = 1681$ valt af omdat x geen kwadraat kan zijn. We proberen daarom $x = 41^2 - 2$, $x = 41^2 - 1$ en $x = 41^2 + 1$. De tabel geeft het aantal schelpen dat over is op dag 8, 9 en 10.

dag 8	dag 9	dag 10
$41^2 - 2 = 1679$	$1679 - 40 = 1639$	$1639 - 40 = 1599$
$41^2 - 1 = 1680$	$1680 - 40 = 1640$	$1640 - 40 = 1600$
$41^2 + 1 = 1682$	$1682 - 41 = 1641$	$1641 - 40 = 1601$

We zien dat de optie $x = 1679$ afvalt omdat er dan op dag 10 minder dan $40^2 = 1600$ schelpen overblijven. Daarmee valt wegens bovenstaande observatie ook $x < 1679$ af. De optie $x = 1682$ valt af omdat er dan op dag 10 meer dan 40^2 schelpen overblijven. Daarmee valt dus ook $x > 1682$ af. Sabine moet op dag 8 dus precies $41^2 - 1$ schelpen hebben overgehouden.

Om dit patroon terug te volgen kijken we naar de situatie dat het aantal schelpen iets minder dan een kwadraat is. Stel dat Sabine op zekere dag $n^2 - a$ schelpen overhoudt, waarbij $1 \leqslant a < n$. Dan houdt zij de dag erna $n^2 - a - (n-1)$ schelpen over. Omdat $a < n$ geldt dat $n^2 - a - (n-1) > n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2$. De dag daarna houdt zij dus $n^2 - a - (n-1) - (n-1) = (n-1)^2 - (a-1)$ schelpen over.

Als Sabine begint met $45^2 - 5$ schelpen dan houdt ze dus op dag 2, 4, 6 en 8 respectievelijk $44^2 - 4$, $43^2 - 3$, $42^2 - 2$ en $41^2 - 1$ schelpen over. Dit geeft een oplossing.

Als Sabine begint met $45^2 - 4$ schelpen, dan houdt ze op dag 8 te veel schelpen over, namelijk $41^2 - 0$. Sabina kan dus niet gestart zijn met $45^2 - 4$ of meer schelpen.

Als Sabine begint met $45^2 - 6$ schelpen, dan houdt ze op dag 8 slechts $41^2 - 2$ schelpen over. Dat is te weinig, dus Sabine kan niet begonnen zijn met $45^2 - 6$ of minder schelpen.

We concluderen dat de enige mogelijkheid is dat Sabine is begonnen met $45^2 - 5 = 2020$ schelpen.