Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 september 2019

Uitwerkingen

1. Versie voor klas 4 en lager

(a) Een voorbeeld van zo een getal voor $a = 4$ is het getal 126734895. Voor $a = 5$ werkt het getal 549832761. (Dit zijn overigens niet de enige oplossingen.)

(b) We laten zien dat er voor $a = 3, 6, 7, 8, 9$ geen volledig getal is waarvan het verschilgetal gelijk is aan $1a1a1a1a$. Er volgt dan meteen dat er ook geen volledig getal N is waarvan het verschilgetal gelijk is aan $a1a1a1a1$ (anders konden we de cijfers van N in omgekeerde volgorde zetten en een volledig getal krijgen met verschilgetal $1a1a1a1a$).

Voor a gelijk aan 6, 7, 8 en 9 bestaat er niet zo een N om de volgende reden. Voor de cijfers 4, 5 en 6 is er geen cijfer dat a verschilt van het desbetreffende cijfer. Omdat het verschilgetal van het volledige getal N gelijk is aan $1a1a1a1a$, staat elk cijfer van N, behalve het eerste cijfer, naast een cijfer waarmee het a verschilt. Dat betekent dat de cijfers 4, 5 en 6 alle drie alleen als eerste cijfer kunnen voorkomen. Dat kan natuurlijk niet.

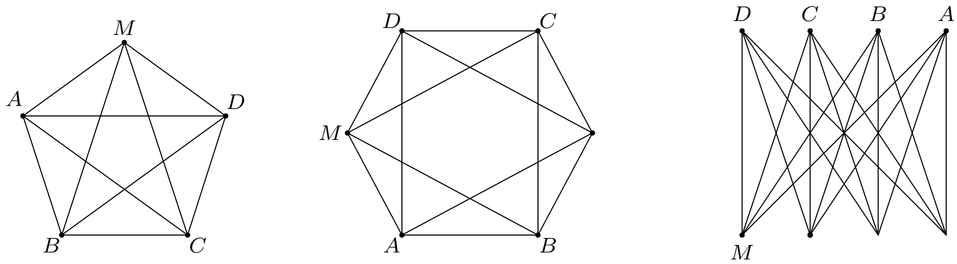
Voor $a = 3$ is het argument anders. Als we kijken naar de cijfers die 3 verschillen, dan vinden we de drietallen 1–4–7, 2–5–8 en 3–6–9. Als de 1 naast de 4 staat in N, dan kan de 7 niet meer naast de 4 staan en moet 7 wel het eerste cijfer van N zijn. Als de 1 niet naast de 4 staat, dan moet 1 het eerste cijfer van N zijn. Op dezelfde manier moet ook ofwel 2 ofwel 8 het eerste cijfer van N zijn en dat kan natuurlijk niet.

1. Versie voor klas 5 & klas 6

In de uitwerkingen voor klas 4 en lager kun je zien dat dit mogelijk is voor $a = 4$ en $a = 5$ en onmogelijk is voor alle andere a.

2. We kijken eerst naar de vrienden van één van de gasten, zeg Marieke. We weten dat Marieke precies vier vrienden heeft op het feest, zeg Aad, Bob, Carla en Demi. Met de andere gasten (als die er zijn) is Marieke niet bevriend. Die gasten kunnen onderling geen vriendschappen hebben, en kunnen dus alleen vrienden zijn met Aad, Bob, Carla en Demi. Omdat iedereen precies vier vrienden heeft op het feest, is elk van hen dus bevriend met Aad, Bob, Carla en Demi (en verder met niemand).

Omdat Aad zelf ook precies vier vrienden heeft (waaronder Marieke), bevat de groep mensen die geen vriend zijn van Marieke hooguit drie personen. Als die groep uit nul, één of drie mensen bestaat, dan hebben we de volgende oplossing (waarbij een lijn tussen twee mensen betekent dat ze vrienden zijn):



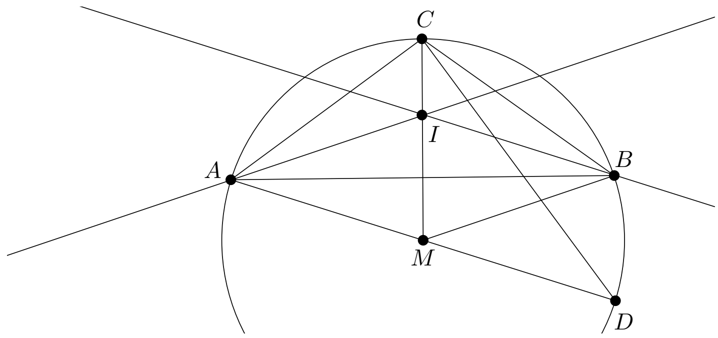
Oplossingen met vijf, zes en acht gasten in totaal.

Nu zullen we bewijzen dat het niet mogelijk is dat die groep uit twee mensen bestaat. In dit geval zou Aad nog precies één vriend hebben onder Bob, Carla en Demi; zeg dat Aad en Bob vrienden zijn. Op dezelfde manier moet Carla een vriend zijn met een van Aad, Bob en Demi. Omdat Aad en Bob al vier vrienden hebben, moeten Carla en Demi vrienden zijn van elkaar. Echter, omdat zij beiden geen vrienden zijn met Aad, is dat in tegenspraak met de eis in de opgave.

Op het feestje zijn dus vijf, zes of acht gasten aanwezig. De mogelijke waarden voor n zijn dus 5, 6 en 8.

3. Versie voor klas 4 en lager

Het spiegelbeeld van punt M in de lijn AB noemen we I. We definiëren $\alpha = \angle CAI$ en $\beta = \angle CBI$. Omdat AI de bissectrice is van $\angle CAB$ zien we dat $\angle IAB = \alpha$. Omdat I het spiegelbeeld van M is in de lijn AB, zien we dat $\angle BAM = \alpha$. Driehoek AMC is gelijkbenig met tophoek M, omdat $|AM| = |CM|$. Dus zien we dat $\angle MCA = \angle CAM = 3\alpha$. Op dezelfde manier zien we dat $\angle IBA = \angle ABM = \beta$ en $\angle MCB = 3\beta$. De hoekensom in driehoek ABC is nu $2\alpha + (3\alpha + 3\beta) + 2\beta = 180°$. Hieruit leiden we af dat $\alpha + \beta = \frac{180°}{5} = 36°$ en dus dat $\angle ACB = 3\alpha + 3\beta = 3 \cdot 36° = 108°$.



3. Versie voor klas 5 & klas 6

Deze oplossing gaat verder waar de oplossing voor klas 4 en lager is gebleven. Lees die oplossing dus eerst.

Doordat driehoek MAB ook gelijkbenig is (want $|AM| = |BM|$) zien we dat $\alpha = \beta = 18°$. Hieruit volgt dat $\angle CAB = 2\alpha = \angle ABC$ en dus dat driehoek ACB gelijkbeng is. Door de hoekensom in driehoek AMC te bekijken, zien we dat $\angle AMC = 180° - 6\alpha = 72°$. Dus zien we ook dat $\angle CMD = 180° - \angle AMC = 108°$. We hadden eerder al gezien dat $\angle ACB = 108°$. Driehoeken ACB en CMD zijn dus allebei gelijkbenige driehoeken met een tophoek van 108° en zijn dus gelijkvormig. Hieruit volgt dat

$$\frac{|CM|}{|CD|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Door met beide noemers te vermenigvuldigen en op te merken dat $|CM| = |AM|$ vinden we het gevraagde.

4. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

Merk op dat

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

voor alle $n \geqslant 0$. We vinden nu dat voor elke $m \geqslant 0$ geldt

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right).$$

In deze som vallen alle termen tegen elkaar weg, behalve de eerste en de laatste. We vinden zo dat

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \frac{1}{1} - \frac{1}{m+2} < 1.$$

Om op een oplossing te komen, kun je beginnen met het maken van een tabel met voor $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ de waarden van a_m en ook de waarden van $a_0 + \cdots + a_m$. Probeer een patroon te ontdekken in de waarden van $a_0 + \cdots + a_m$, bijvoorbeeld dat $a_0 + \cdots + a_m = \frac{m+1}{m+2}$. Dit kun je op een slimme manier rechtstreeks bewijzen, zoals in de oplossing hierboven, maar het is ook mogelijk om dit met inductie naar m te bewijzen.

4. Versie voor klas 6

Merk op dat we voor alle $n \geqslant 0$ het getal a_n als volgt kunnen herschrijven:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{F_n F_{n+2}} \\ &= \frac{F_{n+1}}{F_n F_{n+2}} \cdot \frac{1}{F_{n+1}} \\ &= \frac{F_{n+2} - F_n}{F_n F_{n+2}} \cdot \frac{1}{F_{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{F_{n+1}} \\ &= \frac{1}{F_n F_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}. \end{aligned}$$

We vinden nu dat voor elke $m \geqslant 0$ de som $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ gelijk is aan

$$\left(\frac{1}{F_0F_1} - \frac{1}{F_1F_2}\right) + \left(\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3}\right) + \left(\frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{F_mF_{m+1}} - \frac{1}{F_{m+1}F_{m+2}}\right).$$

In deze som vallen alle termen tegen elkaar weg, behalve de eerste en de laatste. We vinden zo dat

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \frac{1}{F_0F_1} - \frac{1}{F_{m+1}F_{m+2}} = 1 - \frac{1}{F_{m+1}F_{m+2}} < 1.$$

Om op een oplossing te komen, kun je beginnen met het maken van een tabel met voor $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ de waarden van a_m en ook de waarden van $a_0 + \cdots + a_m$. Probeer een patroon te ontdekken in de waarden van $a_0 + \cdots + a_m$, bijvoorbeeld dat $a_0 + \cdots + a_m = 1 - \frac{1}{F_{m+1}F_{m+2}}$. Dit kun je op een slimme manier rechtstreeks bewijzen, zoals in de oplossing hierboven, maar het is ook mogelijk om dit met inductie naar m te bewijzen.

5. (a) Thomas en Nils doen elk 1009 zetten en de laatste zet is voor Nils. Nils kan zorgen dat de laatste kaart op tafel een getal heeft dat *niet* deelbaar is door 3. Hij kan namelijk beginnen om kaartjes te pakken waarvan het nummer wel deelbaar is door 3, totdat die kaartjes op zijn. Omdat er maar 672 van zulke kaartjes zijn, heeft hij daarvoor voldoende beurten.

We bekijken nu de situatie bij de laatste zet van Nils. Laat k het getal op de laatste kaart zijn en noem de totalen van de getallen van Thomas en Nils op dit moment a en b. Nils heeft twee opties. Als hij de laatste kaart weggeeft, wordt het verschil van de uitkomsten $(a+k)-b$ en als hij de kaart houdt, wordt het verschil $a-(b+k)$. Nils kan dus winnen tenzij beide getallen deelbaar zijn door 3. Maar in dat geval zou ook $(a+k-b)-(a-b-k) = 2k$ deelbaar zijn door 3. Omdat k niet deelbaar is door 3, is ook $2k$ niet deelbaar door 3 en kan Nils dus zeker winnen.

(b) Nils kan winnen. We onderscheiden drie typen kaarten, afhankelijk van het getal op het kaartje: type 1 (het getal heeft rest 1 bij deling door 3), type 2 (het getal heeft rest 2 bij deling door 3) en type 3 (het getal is deelbaar door 3). Omdat $2019 = 3 \cdot 673$ en kaartje 2020 van type 1 is, zijn er dus 674 kaartjes van type 1, 673 kaartjes van type 2 en 673 kaartjes van type 3.

Om te winnen kiest Nils in de eerste beurt een kaart van type 3 (en geeft die aan Thomas). Er zijn dan nog 674 kaarten van type 1 over, 673 van type 2 en 672 van type 3. In de beurten erna reageert hij steeds als volgt op de zet van Thomas (als hij dat kan).

(i) Als Thomas een kaart van type 1 kiest, dan kiest Nils een kaart van type 2 en geeft die aan dezelfde persoon die de kaart van Thomas heeft gekregen.

(ii) Als Thomas een kaart van type 2 kiest, dan kiest Nils een kaart van type 1 en geeft die aan dezelfde persoon die de kaart van Thomas heeft gekregen.

(iii) Als Thomas een kaart van type 3 kiest, dan doet Nils dat ook (en geeft de kaart aan Thomas).

Zolang Nils dit volhoudt, is na zijn beurt de som van elke speler steeds weer deelbaar 3 (want een getal van type 1 en een getal van type 2 geven opgeteld een getal dat deelbaar is door 3).

Omdat het aantal kaarten van type 3 na Nils' beurt altijd *even* is, kan Nils in geval (iii) altijd zijn geplande zet uitvoeren. Omdat het aantal kaarten van type 1 na Nils' beurt altijd precies 1 groter is dan dat van type 2, kan hij in geval (ii) ook altijd zijn geplande zet uitvoeren. Pas als alle kaarten van type 2 op zijn en Thomas de laatste kaart van type 1 pakt (geval (i)) kan Nils zijn geplande zet niet uitvoeren. In dat geval kan Nils echter niet meer verliezen. Immers, na de beurt van Thomas is de som van één speler nog steeds deelbaar door 3, maar is de som van de andere speler niet meer deelbaar door 3. Omdat er nu alleen nog kaarten van type 3 over zijn, blijft dit zo tot alle kaarten op zijn. Aan het eind is het verschil van de sommen van beide spelers dus niet deelbaar door 3 en daarmee wint Nils.