# Finale
# Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 15 september 2017

## Uitwerkingen

**1. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager**

Een getal waarvan de cijfers (van links naar rechts) gelijk zijn aan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ noteren we met $\overline{c_1 c_2 \ldots c_k}$.

(a) Laat $n = \overline{c_1 c_2 \ldots c_k}$ een evenaardig getal zijn groter dan 9 (dus $k \geqslant 2$). We zullen bewijzen dat $n$ inderdaad de som is van twee onevenaardige getallen.

Laat $p = \overline{c_2 \ldots c_k}$ en $q = \overline{c_1 0 \ldots 0}$ (met $k-1$ cijfers gelijk aan 0). Omdat $n$ evenaardig is, geldt dat $c_2 \geqslant c_1 \geqslant 1$, dus $p$ en $q$ beginnen niet met cijfer 0. Bovendien is het duidelijk dat $n = p + q$. Het volstaat dus te bewijzen dat $p$ en $q$ onevenaardig zijn.

Dat $q$ onevenaardig is, volgt direct uit het feit dat op alle posities behalve de eerste een 0 staat. De cijfers van $p$ zijn dezelfde cijfers als die van $n$, uitgezonderd het eerste cijfer $c_1$, maar de cijfers die eerst op een even positie stonden staan nu op een oneven positie en andersom. Daarom is ook $p$ onevenaardig.

(b) Het getal $n = 109$ is onevenaardig, maar is niet de som van twee evenaardige getallen. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat $n = p + q$, waarbij $p$ en $q$ evenaardig zijn. We zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

Merk eerst op dat de getallen 100 tot en met 108 niet evenaardig zijn. De getallen $p$ en $q$ moeten dus kleiner zijn dan 100, en daarom ook allebei groter dan 9. Hieruit volgt dat $p$ en $q$ allebei precies twee cijfers hebben, zeg $p = \overline{ab}$ en $q = \overline{cd}$. Uit $p + q = 109$ volgt nu dat $b + d = 9$ (want $b + d < 19$) en $a + c = 10$. Dus $b + d < a + c$ en daarom geldt dat $b < a$ of $d < c$ (of allebei). In het eerste geval is $p$ niet evenaardig en in het tweede geval is $q$ niet evenaardig. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $p$ en $q$ juist wel evenaardig waren.

We concluderen dat het onevenaardige getal 109 niet te schrijven is als de som van twee evenaardige getallen.

**1. Versie voor klas 6**

Een getal waarvan de cijfers (van links naar rechts) gelijk zijn aan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ noteren we met $\overline{c_1 c_2 \ldots c_k}$.

(a) Laat $n = \overline{c_1 c_2 \ldots c_k}$ een onevenaardig getal zijn groter dan 9 (dus $k \geqslant 2$). We zullen bewijzen dat $n$ inderdaad de som is van twee onevenaardige getallen.

Als $c_2 \geqslant 1$, dan kunnen we $n$ schrijven als de som van de volgende twee onevenaardige getallen: $\overline{10 \ldots 0}$ ($k-2$ nullen) en $\overline{c_1 (c_2{-}1) c_3 \ldots c_k}$.

Als $c_2 = 0$ en $c_1 \geqslant 2$, dan kunnen we $n$ schrijven als de som van de volgende twee onevenaardige getallen: $\overline{10 \ldots 0}$ ($k-1$ nullen) en $\overline{(c_1{-}1) c_2 c_3 \ldots c_k}$.

Als $n = \overline{10 \ldots 0}$, dan kunnen we $n$ schrijven als de som van de volgende twee onevenaardige getallen: $\overline{1}$ en $\overline{9 \ldots 9}$ ($k-1$ negens).

Wat nu nog resteert, is het geval dat $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ en niet alle cijfers $c_3, \ldots, c_k$ gelijk aan 0 zijn. Laat $c_t$ een cijfer ongelijk aan 0 zijn, met $t \geqslant 3$ zo klein mogelijk. Dus $n = \overline{10 \ldots 0 c_t \ldots c_k}$ met $c_t \geqslant 1$.

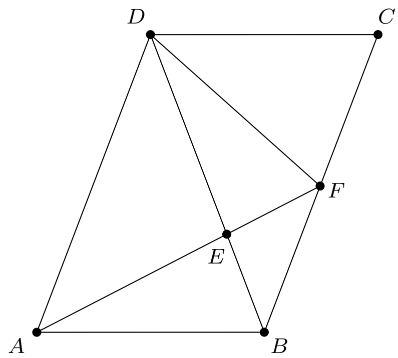
Omdat $n$ onevenaardig is en $c_{t-1} = 0 < 1 \leqslant c_t$ volgt dat $t$ *oneven* moet zijn. We kunnen nu $n$ schrijven als de som van de getallen $\overline{10 \ldots 0}$ ($k-1$ nullen) en $m = \overline{c_t c_{t+1} \ldots c_k}$. Omdat $t$ oneven is, staan de cijfers op oneven posities in $m$ ook op oneven posities in $n$. Deze cijfers zijn dus minstens zo groot als hun buurcijfers (want $n$ is onevenaardig), waaruit volgt dat $m$ onevenaardig is.

(b) Het getal $n = 109$ is onevenaardig, maar is niet de som van twee evenaardige getallen. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat $n = p + q$, waarbij $p$ en $q$ evenaardig zijn. We zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

Merk eerst op dat de getallen 100 tot en met 108 niet evenaardig zijn. De getallen $p$ en $q$ moeten dus kleiner zijn dan 100, en daarom ook allebei groter dan 9. Hieruit volgt dat $p$ en $q$ allebei precies twee cijfers hebben, zeg $p = \overline{ab}$ en $q = \overline{cd}$. Uit $p + q = 109$ volgt nu dat $b + d = 9$ (want $b + d < 19$) en $a + c = 10$. Dus $b + d < a + c$ en daarom geldt dat $b < a$ of $d < c$ (of allebei). In het eerste geval is $p$ niet evenaardig en in het tweede geval is $q$ niet evenaardig. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $p$ en $q$ juist wel evenaardig waren.

We concluderen dat het onevenaardige getal 109 niet te schrijven is als de som van twee evenaardige getallen.

**2. Versie voor klas 4 en lager**



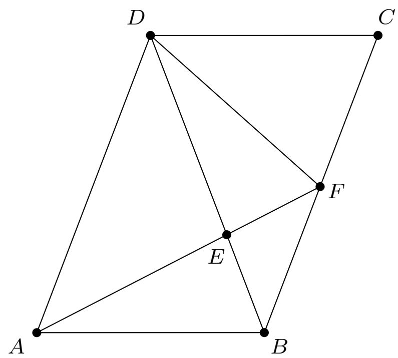

Driehoek $AED$ is gelijkbenig en dus zijn hoeken $\angle EDA$ en $\angle DAE$ gelijk. Die hoeken zijn op hun beurt weer gelijk aan hoeken $\angle EBF$ en $\angle BFE$, vanwege Z-hoeken. Hieruit leiden we af dat driehoek $BFE$ ook gelijkbenig is en dat $|BE| = |EF|$.

Als we nu kijken naar driehoek $ABE$ en driehoek $DFE$ dan zien we dat $|AE| = |DE|$ en $|BE| = |FE|$. Ook zien we dat $\angle BEA$ overstaand is aan $\angle FED$. Driehoeken $ABE$ en $DFE$ zijn dus congruent (ZHZ).

Uit deze congruentie volgt dat $|DF| = |AB|$ en omdat $ABCD$ een parallellogram is, geldt ook dat $|AB| = |CD|$. We zien dus dat driehoek $CDF$ ook gelijkbenig is (met tophoek $D$).

Ook $ADB$ is gelijkbenig en omdat $\angle FCD = \angle BAD$ (want $ABCD$ is een parallellogram) zien we dat de driehoeken $CDF$ en $ADB$ gelijkvormig zijn. In het bijzonder vinden we $\angle CDF = \angle ADB$.

**2. Versie voor klas 5 & klas 6**




Driehoek $AED$ is gelijkbenig en dus zijn hoeken $\angle EDA$ en $\angle DAE$ gelijk. Die hoeken zijn op hun beurt weer gelijk aan hoeken $\angle EBF$ en $\angle BFE$, vanwege Z-hoeken. Hieruit leiden we af dat driehoek $BFE$ ook gelijkbenig is en dat $|BE| = |EF|$.

Als we nu kijken naar driehoek $ABE$ en driehoek $DFE$ dan zien we dat $|AE| = |DE|$ en $|BE| = |FE|$. Ook zien we dat $\angle BEA$ overstaand is aan $\angle FED$. Driehoeken $ABE$ en $DFE$ zijn dus congruent (ZHZ).

Uit deze congruentie volgt dat $|DF| = |AB|$ en omdat $ABCD$ een parallellogram is, geldt ook dat $|AB| = |CD|$. We zien dus dat driehoek $CDF$ ook gelijkbenig is (met tophoek $D$).

Enerzijds volgt hieruit dat $\angle FCD = \angle DFC$. Anderzijds weten we vanwege $|BD| = |AD| = |BC|$ dat driehoek $DBC$ gelijkbenig is, zodat $\angle FCD = \angle CDB = 2 \cdot \angle CDF$, omdat $DF$ de bissectrice is van hoek $CDB$.

Alles bij elkaar hebben we dus $\angle DFC = \angle FCD = 2 \cdot \angle CDF$. We weten echter ook dat de hoekensom in een driehoek altijd 180 graden is, zodat geldt:

$$180^\circ = \angle DFC + \angle FCD + \angle CDF = 5 \cdot \angle CDF.$$

Hieruit volgt $\angle CDF = \frac{1}{5} \cdot 180^\circ = 36^\circ$ en dus $\angle FCD = 2 \cdot \angle CDF = 72^\circ$. Vanwege gelijkbenigheid geldt ook $\angle CDB = 72^\circ$. Vanwege Z-hoeken vinden we dus dat $\angle ABD = \angle CDB = 72^\circ$.

**3.** Laat de zes scores van de teams gelijk zijn aan $s$, $s+2$, $s+4$, $s+6$, $s+8$ en $s+10$. Laat $T$ het totaal aantal behaalde punten zijn. Er geldt dus $T = 6s + 30$. Het totaal aantal punten is dus een zesvoud.

In totaal zijn er $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ wedstrijden gespeeld. Het aantal wedstrijden dat gelijkspel is noemen we $g$. Een gelijkspel levert in totaal $1+1 = 2$ punten op aan de deelnemers, elke andere wedstrijd $3+0 = 3$ punten. Het totaal aantal behaalde punten is dus $T = g \cdot 2 + (15-g) \cdot 3 = 45 - g$.

Uit $T = 45 - g$ volgt dat $30 \leqslant T \leqslant 45$ want voor het aantal keer gelijkspel geldt $0 \leqslant g \leqslant 15$. Omdat we ook weten dat $T$ een zesvoud is, vinden we als enige mogelijk waarden $T = 30$, $T = 36$ en $T = 42$.

Als $T = 30$, dan geldt dat $g = 45 - 30 = 15$. Maar dan zijn alle wedstrijden in gelijkspel geëindigd en heeft elk team dezelfde score. Het geval $T = 30$ valt daarom af.

Als $T = 36$, dan geldt dat $g = 45 - 36 = 9$ en $s = \frac{T-30}{6} = 1$. De scores van de zes teams zijn dus $1, 3, 5, 7, 9, 11$. Het team met score 1 heeft 4 wedstrijden verloren (en één gelijkgespeeld). Het team met score 3 heeft minstens 2 wedstrijden verloren (want hoogstens 3 wedstrijden niet verloren). Het team met score 11 heeft minstens 3 wedstrijden gewonnen (met 2 gewonnen wedstrijden is de score hooguit $3+3+1+1+1 = 9$), dus naast de teams met score 1 en 3 heeft nog minstens één team een wedstrijd verloren. In totaal zijn er dus minstens $4+2+1 = 7$ wedstrijden verloren, in tegenspraak met het feit dat er maar $15 - 9 = 6$ wedstrijden niet in gelijkspel zijn geëindigd. Het geval $T = 36$ valt dus af.

Ten slotte bekijken we het geval $T = 42$. De scores zijn dan $2, 4, 6, 8, 10, 12$ en $g = 3$. Omdat het aantal punten verkregen uit winst altijd een drievoud is, moeten de zes teams respectievelijk minstens $2, 1, 0, 2, 1, 0$ punten uit gelijkspel hebben behaald. In totaal zijn er $2 \cdot 3 = 6$ punten uit gelijkspel. Omdat $2+1+0+2+1+0 = 6$ kunnen de zes teams dus niet meer dan de genoemde aantallen punten uit gelijkspel hebben gehaald. In het bijzonder heeft het team dat als vierde is geëindigd (het team met 6 punten) 0 keer gelijk gespeeld en dus tweemaal gewonnen.

**4. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager**

(a) Laat $r$ de rest zijn bij deling van $n$ door $a$. We bewijzen eerst dat $r < \frac{n}{2}$. Als $2a \leqslant n$, dan volgt dit uit het feit dat $r < a$. Als $2a > n$, dan geldt $r = n - a$ (aangezien we al wisten dat $a < n$), zodat $r = n - a < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.
Op dezelfde manier is de rest bij deling van $n$ door $b$ ook kleiner dan $\frac{n}{2}$.
Als we $n$ door $a$ en $b$ delen, dan zijn de twee resten elk kleiner dan $\frac{n}{2}$, dus zijn de resten samen kleiner dan $n$.

(b) Laat $r$, $s$ en $t$ de resten zijn bij deling van $n$ door 99, 132 en 229. Het getal $n - t$ is een veelvoud van 229 en ongelijk aan 0 omdat $n > 229 > t$. Er is gegeven dat $r + s + t = n$, oftewel dat $n - t = r + s$. We concluderen dat $r + s$ een positief veelvoud moet zijn van 229. Omdat $99 + 132 < 2 \cdot 229$ geldt zeker dat $r + s < 2 \cdot 229$, dus $r + s = 229$.

(c) Aangezien $r \leqslant 98$ en $s \leqslant 131$ volgt uit $r + s = 229$ dat $r = 98$ en $s = 131$. Het getal $n+1$ is dus deelbaar door zowel 99 als 132 en daarmee deelbaar door het kleinste gemene veelvoud $\text{kgv}(99, 132) = \text{kgv}(9 \cdot 11, 3 \cdot 4 \cdot 11) = 4 \cdot 9 \cdot 11 = 396$. Aangezien $n = 229 + t$ en $t < 229$ geldt bovendien dat $n + 1 \leqslant 458$. De enige mogelijkheid is dus $n + 1 = 396$, oftewel $n = 395$.
Voor $n = 395$ zijn de drie resten gelijk aan $r = 98$, $s = 131$ en $t = 166$, zodat inderdaad geldt $n = r + s + t$.

**4. Versie voor klas 6**

(a) Laat $r$ de rest zijn bij deling van $n$ door $a$. We bewijzen eerst dat $r < \frac{n}{2}$. Als $2a \leqslant n$, dan volgt dit uit het feit dat $r < a$. Als $2a > n$, dan geldt $r = n - a$ (aangezien we al wisten dat $a < n$), zodat $r = n - a < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

Op dezelfde manier is de rest bij deling van $n$ door $b$ ook kleiner dan $\frac{n}{2}$.

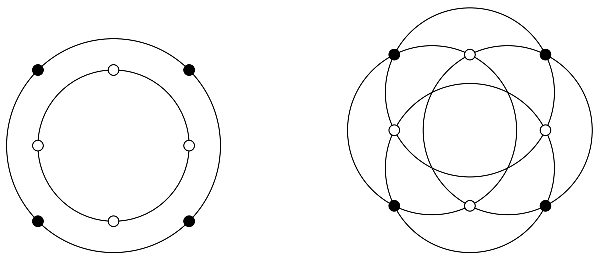
Als we $n$ door $a$ en $b$ delen, dan zijn de twee resten elk kleiner dan $\frac{n}{2}$, dus zijn de resten samen kleiner dan $n$.

(b) Laat $r$, $s$ en $t$ de resten zijn bij deling van $n$ door 99, 132 en 229. Het getal $n - t$ is een veelvoud van 229 en ongelijk aan 0 omdat $n > 229 > t$. Er is gegeven dat $r + s + t = n$, oftewel dat $n - t = r + s$. We concluderen dat $r + s$ een positief veelvoud moet zijn van 229. Omdat $99 + 132 < 2 \cdot 229$ geldt zeker dat $r + s < 2 \cdot 229$, dus $r + s = 229$.

Aangezien $r \leqslant 98$ en $s \leqslant 131$ volgt uit $r + s = 229$ dat $r = 98$ en $s = 131$. Het getal $n + 1$ is dus deelbaar door zowel 99 als 132 en daarmee deelbaar door het kleinste gemene veelvoud $\text{kgv}(99, 132) = \text{kgv}(9 \cdot 11, 3 \cdot 4 \cdot 11) = 4 \cdot 9 \cdot 11 = 396$. Aangezien $n = 229 + t$ en $t < 229$ geldt bovendien dat $n + 1 \leqslant 458$. De enige mogelijkheid is dus $n + 1 = 396$, oftewel $n = 395$.

Voor $n = 395$ zijn de drie resten gelijk aan $r = 98$, $s = 131$ en $t = 166$, zodat inderdaad geldt $n = r + s + t$.

**5.** Van de acht punten kleuren we er vier zwart en de andere vier wit, zoals aangegeven in de linker figuur. De cirkel door de vier zwarte punten noemen we $C_1$ en de cirkel door de vier witte punten noemen we $C_2$. Als een paar punten op een cirkel $C$ ligt, dan zeggen we dat $C$ dat paar *dekt*.



Cirkel $C_1$ dekt alle paren zwarte punten en cirkel $C_2$ dekt alle paren witte punten. Het is makkelijk na te gaan dat elk van de $4 \cdot 4 = 16$ paren bestaande uit een wit en een zwart punt wordt gedekt door een van de vier cirkels in de rechter figuur. Samen vormen deze zes cirkels dus een oplossing.

We zullen nu bewijzen dat er geen oplossing bestaat met vijf (of minder) cirkels. Eerst merken we op dat een cirkel die door meer dan twee zwarte punten gaat gelijk moet zijn aan $C_1$, en een cirkel die door meer dan twee witte punten gaat gelijk moet zijn aan $C_2$. Een cirkel ligt immers vast zodra we drie punten kiezen waar hij doorheen moet gaan.

Een cirkel die door hoogstens 2 zwarte punten gaat, dekt hoogstens één van de $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ paren zwarte punten. Een oplossing met vijf cirkels moet dus wel cirkel $C_1$ bevatten (want anders worden er hooguit 5 paren zwarte punten gedekt). Op dezelfde manier moet de oplossing wel cirkel $C_2$ bevatten.

Op elk van de resterende drie cirkels liggen hoogstens 2 zwarte en hoogstens 2 witte punten. De cirkel dekt dus hoogstens $2 \cdot 2 = 4$ paren bestaande uit een wit en een zwart punt. In totaal dekken de vijf cirkels dus hoogstens $0 + 0 + 3 \cdot 4 = 12$ dergelijke paren van de 16 in totaal. De vijf cirkels vormen dus geen correcte oplossing.

We concluderen dat het kleinst mogelijke aantal cirkels in een oplossing gelijk is aan 6.