Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie klas 5

vrijdag 15 september 2017
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. We bekijken positieve gehele getallen die we schrijven in het (normale) tientallig stelsel. In zo'n getal nummeren we de posities van de cijfers van links naar rechts, dus het meest linkse cijfer (dat nooit een 0 mag zijn) staat op positie 1.

Een getal noemen we *evenaardig* als elk cijfer op een *even* positie (als dat er is) minstens zo groot is als zijn directe buurcijfers (als die er zijn).

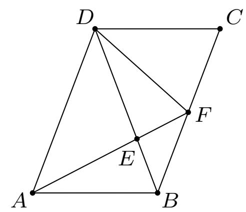
Een getal noemen we *onevenaardig* als elk cijfer op een *oneven* positie minstens zo groot is als zijn directe buurcijfers (als die er zijn).

Ter illustratie: 3122 is onevenaardig maar niet evenaardig, 7 is zowel evenaardig als onevenaardig en 123 is geen van beide.

(a) Laat zien: elk evenaardig getal groter dan 9 is te verkrijgen door twee onevenaardige getallen bij elkaar op te tellen.

(b) Laat zien: er bestaat een onevenaardig getal groter dan 9 dat niet te verkrijgen is door twee evenaardige getallen bij elkaar op te tellen.

2. Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $|AD| = |BD|$. Op lijnstuk BD ligt een punt E zo dat $|AE| = |DE|$. Het verlengde van AE snijdt lijnstuk BC in F. Gegeven is dat lijn DF de bissectrice is van hoek CDE. Bepaal de grootte van hoek ABD.



3. Aan een hockeytoernooi doen zes teams mee. Elk team speelt precies één keer tegen elk ander team. Voor een gewonnen wedstrijd krijgt een team 3 punten, voor een gelijkspel 1 punt en voor een verloren wedstrijd 0 punten. Aan het einde van het toernooi wordt een ranglijst opgemaakt. Er blijken geen gedeelde plaatsen op de ranglijst voor te komen. Ook blijkt dat elk team (behalve het team dat laatste is geworden) precies 2 punten meer heeft dan het team dat één plaats lager staat.
Bewijs dat het team dat als vierde geëindigd is, precies twee wedstrijden gewonnen heeft.

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

4. Als we het getal 13 delen door de drie getallen 5, 7 en 9, dan leveren die delingen resten op: bij deling door 5 krijgen we rest 3, bij deling door 7 rest 6 en bij deling door 9 rest 4. Als we deze resten bij elkaar optellen, krijgen we $3 + 6 + 4 = 13$, het oorspronkelijke getal.

(a) Laat n een positief geheel getal zijn en laat a en b positieve gehele getallen kleiner dan n zijn. Bewijs: als je n deelt door a en b, dan zijn de twee resten bij elkaar opgeteld nooit gelijk aan n.

(b) We bekijken gehele getallen $n > 229$ met de volgende eigenschap: als je n deelt door 99, 132 en 229, dan zijn de drie resten bij elkaar opgeteld gelijk aan n.
Bewijs dat voor zo'n getal n altijd geldt dat de twee resten bij deling van n door 99 en 132 bij elkaar opgeteld 229 zijn.

(c) Bepaal alle gehele getallen $n > 229$ met de eigenschap dat als je n deelt door 99, 132 en 229, de drie resten bij elkaar opgeteld gelijk zijn aan n.

5. De acht punten hieronder zijn de hoekpunten en middens van de zijden van een vierkant. We willen een aantal cirkels door de punten tekenen op zo'n manier dat elk tweetal punten samen op (minstens) een van de cirkels ligt.
Vind het kleinst mogelijke aantal cirkels waarmee dit kan.