Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 18 september 2015

Uitwerkingen

1. (a) Het is mogelijk om 2015 groepjes te maken. Neem bijvoorbeeld de volgende 2015 groepjes: $\{-4,-3,-2,-1,i\}$, waarbij i van 1 tot en met 2015 loopt. Elk groepje bestaat inderdaad uit vijf verschillende getallen en elk tweetal groepjes heeft vier getallen gemeen, namelijk -4, -3, -2 en -1.

(b) Als er zes verschillende getallen beschikbaar zijn, zijn er überhaupt maar zes verschillende groepjes van vijf die we kunnen maken, namelijk door steeds een van de zes getallen weg te laten. De zes groepjes die we zo krijgen, hebben ook de eigenschap dat voor elk tweetal verschillende groepjes er precies vier getallen zijn die in beide bevat zijn. Er kunnen dus maximaal zes groepjes gemaakt worden.

(c) Een manier om drie groepjes te maken is: $\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,6\}$ en $\{1,2,3,4,7\}$.

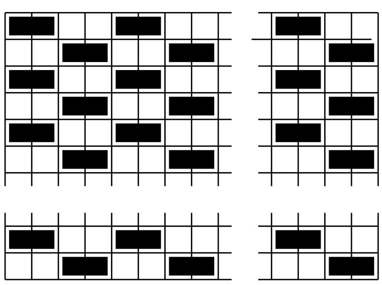
Meer dan drie groepjes is niet mogelijk. Stel namelijk dat je vier of meer groepjes hebt. De eerste twee groepjes zijn $A = \{a,b,c,d,e\}$ en $B = \{a,b,c,d,f\}$, waarbij a, b, c, d, e en f verschillende getallen zijn. Dan is er ergens nog een groepje C waar een zevende getal g in voorkomt. De resterende vier getallen van C moeten zowel in A als in B zitten, dus moet gelden dat $C = \{a,b,c,d,g\}$.

Bekijk nu een hypothetisch vierde groepje D. Dit groepje kan niet getal g bevatten want dan zou, volgens dezelfde redenering als voor C, gelden dat $D = \{a,b,c,d,g\}$. Omdat D niet getal g bevat, moet het de resterende vier getallen a, b, c en d uit C bevatten. Vergelijken met groepjes A en B geeft dan dat D niet getal e mag hebben en ook niet getal f. Groepje D kan dus naast $\{a,b,c,d\}$ geen vijfde getal bevatten, in tegenspraak met de eisen.

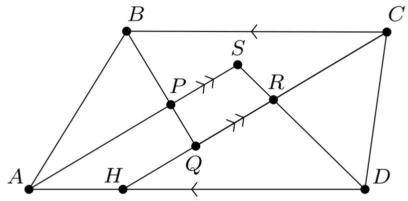
We concluderen dat drie het maximale aantal groepjes is.

2. Verdeel het bord in 500×500 kleine stukken bestaande uit 2×2 vakjes. In elk 2×2-stuk kunnen maar twee van de vier velden bedekt zijn door dominostenen omdat er anders twee dominostenen tegen elkaar aan zouden liggen. In totaal kunnen er dus hooguit $2\cdot500\cdot500 = 500.000$ vakjes op het bord bedekt zijn door dominostenen en kunnen er dus maximaal 250.000 dominostenen liggen.

Het is ook daadwerkelijk mogelijk om 250.000 dominostenen op het bord neer te leggen zonder dat twee dominostenen aan elkaar grenzen. In iedere rij leggen we (in de lengterichting) 250 dominostenen met steeds twee vakjes tussenruimte. In de oneven rijen beginnen we met een domino en eindigen we met twee lege vakjes (want de lengte van de rij is een viervoud). In de even rijen beginnen we juist met twee lege vakjes en eindigen we met een domino. Zo leggen we in totaal $1000\cdot250 = 250.000$ dominostenen, zie de figuur. Het is duidelijk dat dominostenen in dezelfde rij niet aan elkaar grenzen en dat dominostenen in naast elkaar gelegen rijen elkaar hoogstens in de hoekpunten raken.

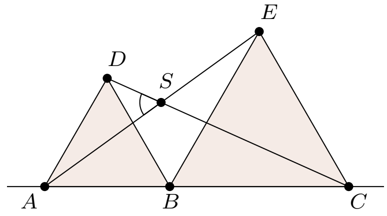


3. **[Versie klas 5 & klas 4 en lager]** Het snijpunt van CQ met AD noemen we H. Dan geldt dat $\frac{1}{2}\angle BAD = \angle SAD = \angle CHD$ wegens F-hoeken. Wegens Z-hoeken geldt juist $\angle CHD = \angle HCB = \frac{1}{2}\angle DCB$. We zien dus dat hoeken $\angle BAD$ en $\angle DCB$ van vierhoek $ABCD$ gelijk zijn. Er volgt dat $\angle BAD + \angle ADC = \angle DCB + \angle ADC = 180°$, want AD en BC zijn evenwijdig. Uit $\angle BAD + \angle ADC = 180°$ volgt dat AB en CD evenwijdig zijn. Vierhoek $ABCD$ is dus een parallellogram. Hieruit volgt dat $|AB| = |CD|$.



3. **[Versie klas 6]** Merk op dat $\angle ABE = 180° - \angle EBC = 120°$ en $\angle DBC = 180° - \angle ABD = 120°$. Ook geldt dat $|AB| = |DB|$ en $|BE| = |BC|$, dus zijn driehoeken ABE en DBC congruent (ZHZ). In het bijzonder volgt dat $\angle EAB = \angle CDB$.

Er geldt dat $\angle ASD = 180° - \angle SDA - \angle DAS = 180° - (60° + \angle CDB) - \angle DAE$. Invullen dat $\angle CDB = \angle EAB$ geeft dat $\angle ASD = 120° - \angle EAB - \angle DAE = 120° - 60° = 60°$.



4. Eerst laten we zien dat in de vergelijking $7pq^2 + p = q^3 + 43p^3 + 1$ de getallen p en q niet allebei oneven kunnen zijn. In dat geval zou $7pq^2 + p$ namelijk even zijn en $q^3 + 43p^3 + 1$ juist oneven. Er geldt dus $p = 2$ of $q = 2$, want 2 is het enige even priemgetal.

In het geval dat $p = 2$ vinden we de vergelijking $14q^2 + 2 = q^3 + 344 + 1$, oftewel $q^3 - 14q^2 = -343$. We zien dan dat q een deler moet zijn van $343 = 7^3$ en dus dat $q = 7$. Invullen geeft dat $(p, q) = (2, 7)$ ook daadwerkelijk voldoet, immers $14q^2 + 2 = 2 \cdot 7 \cdot 7^2 + 2$ en $q^3 + 344 + 1 = 7^3 + (7^3 + 1) + 1 = 2 \cdot 7^3 + 2$ zijn gelijk.

Nu bekijken we het geval $q = 2$ en p oneven. De vergelijking voor p wordt dan $28p + p = 8 + 43p^3 + 1$. Omdat $28p + p$ oneven is en $8 + 43p^3 + 1$ juist even, zijn er in dit geval geen oplossingen.

De enige oplossing is dus $(p, q) = (2, 7)$.

5. Als we in de gegeven ongelijkheden twee van de onbekenden a, b en c verwisselen, dan vinden we (na herschrijven) weer hetzelfde stelsel ongelijkheden. Verwisselen we bijvoorbeeld a en b, dan vinden we

$$|b - a| \geqslant |c|, \quad |a - c| \geqslant |b|, \quad |c - b| \geqslant |a|.$$

Omdat $|b - a| = |a - b|$, $|a - c| = |c - a|$ en $|c - b| = |b - c|$ kunnen we dit herschrijven als

$$|a - b| \geqslant |c|, \quad |c - a| \geqslant |b|, \quad |b - c| \geqslant |a|,$$

en vinden we dezelfde ongelijkheden als in de opgave. Vanwege deze symmetrie in het probleem mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $a \geqslant b \geqslant c$.

Merk eerst op dat $c \leqslant 0$. Immers, als $a \geqslant b \geqslant c > 0$, dan zou uit $|b - c| \geqslant |a|$ volgen dat $b - c \geqslant a$. Herschrijven geeft dan $b \geqslant a + c > a$, in tegenspraak met het feit dat $b \leqslant a$.

Bekijk nu de volgende reeks ongelijkheden.

$$|a| + |c| = |a| - c \geqslant a - c = (a - b) + (b - c) = |a - b| + |b - c| \geqslant |c| + |a|.$$

Omdat de eerste en laatste term gelijk zijn, volgt dat alle ongelijkheden hierboven gelijkheden zijn en dus in het bijzonder dat $a - b = |a - b| = |c|$. Omdat $c \leqslant 0$ volgt hieruit $a + c = b$. Een van de drie getallen is dus de som van de andere twee.