Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 maart 2026

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. 16 Bekijk driehoeken ABP, ADP, BCP en CDP. Als we AP en CP als basis nemen voor die vier driehoeken, dan hebben de driehoeken dezelfde hoogte. We zien dat de oppervlaktes van ABP (of ADP) en BCP (of CDP) zich dus verhouden als $|AP| : |CP|$. Uit het gegeven in de opgave volgt dat die verhouding $2 : 1$ is. Dat betekent dus dat BCP en CDP samen precies $\frac{1}{3}$ van de oppervlakte van de rechthoek hebben. Die oppervlakte is $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 8 = 32$. Driehoeken BCP en CDP hebben dezelfde oppervlakte. Driehoek BCP heeft dus oppervlakte 16.

B2. 35 In de tabel hiernaast zie je een voorbeeld waarin de waarde 35 bereikt wordt. We gaan nu laten zien dat dit de grootst mogelijke waarde is. Dat doen we door systematisch na te gaan wat de maximale waarde is. Eerst merken we op dat je de grootst mogelijke uitkomst altijd krijgt door grote getallen met grote te vermenigvuldigen en kleine met kleine. Bijvoorbeeld als $a < b$ en $c < d$, dan is $ac + bd$ groter dan $ad + bc$; het verschil is namelijk $(ac + bd) - (ad + bc) = b(d - c) - a(d - c) = (b - a)(d - c)$ en dat is positief. Dit gaan we steeds gebruiken. We lopen nu systematisch de gevallen langs aan de hand van wat het grootste getal in de onderste rij is.

1	2	3	4	5
1	2	5	4	3
1	4	15	16	15

- Het grootste getal is $5 \cdot 5$. We hebben twee keer 1, 2, 3, 4 over. Door kleine getallen met kleine te vermenigvuldigen en grote getallen met grote krijgen we als grootste uitkomst $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$.
- Het grootste getal is $5 \cdot 4$. We hebben dan de rijtjes 1, 2, 3, 4 en 1, 2, 3, 5 over. De grootste uitkomst is $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 34$.
- Het grootste getal is $4 \cdot 4$. We hebben dan twee keer 1, 2, 3, 5 over, maar $5 \cdot 5$ mag niet voorkomen, want dat is groter dan $4 \cdot 4$. De grootste uitkomst is nu $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 35$.
- Het grootste getal is $5 \cdot 3$ (of $3 \cdot 5$). We hebben dan de rijtjes 1, 2, 3, 4 en 1, 2, 4, 5, maar $4 \cdot 5$ en $4 \cdot 4$ mogen niet voorkomen. De grootste uitkomst is nu $1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 32$.
- Het grootste getal is $4 \cdot 3$ (of $3 \cdot 4$). We hebben dan de rijtjes 1, 2, 3, 5 en 1, 2, 4, 5 over, maar $5 \cdot 5$, $4 \cdot 5$ en $3 \cdot 5$ mogen niet voorkomen. De grootste uitkomst is nu $1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 33$.
- Het grootste getal is $5 \cdot 2$ (of $2 \cdot 5$). We hebben dan de rijtjes 1, 2, 3, 4 en 1, 3, 4, 5 over, maar $5 \cdot 5$, $5 \cdot 4$, $5 \cdot 3$, $4 \cdot 4$ en $4 \cdot 3$ mogen niet voorkomen. Dus de 5 moet gecombineerd worden met 1 of 2 en allebei de vieren ook. De grootste uitkomst is dan $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 27$.
- Het grootste getal is $3 \cdot 3$. We hebben dan twee keer 1, 2, 4, 5 over. Nu mag de 5 alleen nog maar met de 1 gecombineerd worden. De enige mogelijke uitkomst is dan $1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 26$.
- Het grootste getal is 8 of lager. Dan is de grootste uitkomst hooguit $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ (en in de praktijk veel lager).

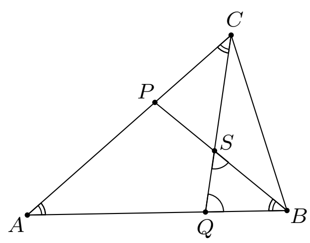
We zien dat 35 inderdaad de maximale waarde is.

B3. 156 Als we met een 1 of 2 beginnen, zijn we meteen klaar. Als we met een getal tussen de 3 en 12 beginnen zijn we in hooguit twee stappen klaar. De getallen 3 tot en met 7 (behalve 5) gaan eerst naar 5 en daarna naar 1. De getallen 8 tot en met 12 (behalve 10) gaan eerst naar 10 en daarna naar 2. Vanaf de getallen tussen de 13 en 62 (behalve de vijfvouden zelf) gaan we eerst naar $15, 20, 25, \ldots,$ of 60 en na deling door 5 hebben we een getal tussen de 3 en 12 zoals hiervoor. We kunnen zo bijhouden wat het laatste getal in de rij is, zoals in de tabel hieronder.

eerste getal	laatste getal	aantal rijen
1	1	1
2	2	1
3–7	1	5
8–12	2	5
13–37	1	25
38–62	2	25
63–187	1	125
188–200	2	13

We zien dat er in totaal $1 + 5 + 25 + 125 = 156$ rijen zijn waarvan het laatste getal een 1 is.

B4. $36°$ Driehoeken ABP en ACQ zijn gelijkbenig, dus $\angle ABP = \angle BAC = \angle ACQ$. We noemen die hoek α. Driehoek BSQ is ook gelijkbenig met top B, dus $\angle BSQ = \angle SQB$. We noemen die hoek β. Deze hoeken zijn gemarkeerd in het plaatje hiernaast. Omdat de hoeken in driehoek BSQ optellen tot $180°$, hebben we $\alpha + 2\beta = 180°$. Tegelijkertijd zien we dat $\angle AQC = 180° - 2\alpha$ vanwege de som van de hoeken in driehoek ACQ, maar ook dat $\angle AQC = 180° - \beta$, omdat AQB een gestrekte hoek is. Hieruit volgt dat $\beta = 2\alpha$. Als we dat in de eerste vergelijking invullen, krijgen we dat $5\alpha = 180°$, oftewel $\alpha = 36°$.



B5. 210 Telkens als Tim twee getallen a en b heeft en een van de getallen vervangt door $a+b$, verandert er niets aan de gemeenschappelijke delers van de twee getallen. Als a en b allebei deelbaar door een getal d waren, dan is $a + b$ daar ook deelbaar door. Omgekeerd, als a en $a + b$ deelbaar door d zijn, dan is b dat ook (en hetzelfde met a en b omgekeerd).

Aan het begin hebben de twee getallen 1 en 1 geen gemeenschappelijke deler, behalve 1. Als N een getal is dat een deler groter dan 1 gemeenschappelijk heeft met i voor alle $i = 2, 3, 4, \ldots, 10$, dan is het dus niet mogelijk dat Tim het getal N op het bord krijgt samen met een van de getallen 2 tot en met 10. Het kleinste getal dat daaraan voldoet is $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$; het getal moet immers een deler groter dan 1 gemeenschappelijk hebben met de priemgetallen 2, 3, 5 en 7 en moet dus een veelvoud van 210 zijn, en het getal 210 heeft ook een gemeenschappelijke deler groter dan 1 met de overgebleven getallen 4, 6, 8, 9 en 10.

Als we een kleinere N kiezen, dan is er dus één van de getallen 2, 3, 5 en 7, zeg i, die geen deler groter dan 1 met N gemeenschappelijk heeft. We kunnen dan juist terugwerken wat er op het bord gestaan moet hebben. We beginnen met N en i en vervangen telkens het grootste van de twee getallen door het verschil tussen de twee getallen. Uiteindelijk krijgen we dan precies de grootste gemeenschappelijke deler van N en i en die is 1. Als je bijvoorbeeld met 30 en 7 begint, dan krijg je eerst 23 en 7, vervolgens 16 en 7, daarna 9 en 7, daarna 7 en 2, daarna 5 en 2, daarna 3 en 2, daarne 2 en 1, en ten slotte 1 en 1. Door deze rij om te draaien, zie je hoe Tim de getallen 30 en 7 op het bord zou kunnen krijgen.

De omgekeerde procedure, zoals beschreven in de laatste alinea, wordt ook wel het Euclidisch algoritme genoemd.

C-opgaven

C1. (a) Er bestaan heel veel gebalanceerde vierkanten voor $n = 6$. Een voorbeeld staat hieronder.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

We hebben de getallen 1 tot en met 6 in een rij gezet en die rij steeds met één opgeschoven. De oneven en even getallen wisselen elkaar zo telkens af en in elk 2×2-vierkantje staan dus precies twee even en twee oneven getallen en de som is even.

(b) We gaan laten zien dat een gebalanceerd vierkant niet bestaat voor $n = 7$. Stel dat zo'n vierkant wel bestaat. Bekijk de eerste kolom. Omdat de getallen 1 tot en met 7 allemaal voor moeten komen in die kolom, staat er ergens een even getal onder een oneven getal of andersom. Stel dat op rij i een even getal staat en op rij $i + 1$ een oneven getal (zie de letters 'e' en 'o' in het voorbeeld hieronder).

e	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
o	a_3	a_4	b_3	b_4	c_3	c_4

Bekijk vervolgens de drie 2×2-vierkantjes rechts van deze twee getallen. In het voorbeeld staan deze gemarkeerd met de letters 'a', 'b' en 'c'. De som van de getallen in elk 2×2-vierkantje moet even zijn. De som van de twee getallen in de eerste kolom is juist oneven. Dat betekent dat de som van alle getallen in de i-de en $(i + 1)$-de rij samen oneven is. Die som is echter $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 7)$, wat even is. Dit is een tegenspraak. Er bestaat daarom geen gebalanceerd vierkant voor $n = 7$.

C2. (a) We bekijken waar de kijklijn van de tafel van Esther naar de tafel linksboven de vijf rijen voor haar (en haar eigen rij) snijdt. Als dit in twee opeenvolgende rijen bij een tafel is, dan ziet ze ook meteen 5 tafels. Dit is in het bijzonder het geval als ze in de rij voor zich een tafel op de kijklijn ziet (want haar eigen tafel en die tafel staan in twee opeenvolgende rijen). Dit is ook het geval als ze 4 rijen voor zich een tafel op de kijklijn ziet, want dan ziet ze een tafel op de 4e en 5e rij voor zich. Als ze 2 rijen voor zich een tafel op de kijklijn ziet, dan ook op 4 rijen voor zich, dus dan zijn we ook klaar. Als ze 3 rijen voor zich een tafel op de kijklijn ziet, dan ook 6 rijen voor zich (ook al bestaat die rij helemaal niet), dus dan ziet ze een tafel op de 5e en 6e rij voor zich en zijn we ook klaar. Het enige geval dat nog over is, is dat ze alleen op de 5e rij voor zich een tafel ziet, namelijk die hoektafel. In dat geval ziet ze dus maar 1 tafel. Beide opties komen voor, bijvoorbeeld als ze in de 6e respectievelijk de 2e kolom zit.

(b) We bekijken de kijklijn vanaf de tafel van Esther naar de tafel linksboven. Stel Esther ziet op deze kijklijn k rijen voor zich voor het eerst een tafel. We bewijzen dat ze dan ook precies op alle veelvouden van k rijen voor zich een tafel ziet. Het is duidelijk dat er in ieder geval op al deze veelvouden van k rijen voor haar een tafel te zien is. En stel nu dat er nog een extra tafel te zien zou zijn op $ak + \ell$ rijen voor haar met $0 < \ell < k$, dan zou ze ook al op ℓ rijen voor zich een tafel op deze kijklijn zien, terwijl ze pas op rij k (vanaf haar geteld) de eerste tafel zag; tegenspraak.

Omdat ze 10 rijen voor zich de hoektafel ziet, moet 10 dus een veelvoud zijn van k. Hieruit volgt dat $k = 1, 2, 5$ of 10 de enige opties zijn. Dan ziet ze respectievelijk dus 10, 5, 2 of 1 tafels op die lijn. Alle vier de opties komen voor, bijvoorbeeld als ze in de 11e, 6e, 3e respectievelijk de 2e kolom zit.

(c) Stel Esther zit op een plek met a rijen voor zich en b rijen achter zich, en c kolommen links van zich en d kolommen rechts van zich. Ga er zonder beperking van de algemeenheid van uit dat de kijklijn naar linksboven maar 1 tafel bevat (namelijk alleen de hoektafel). We bekijken nu de kijklijnen naar rechtsboven en linksonder. Daarop staan 6 en 10, of 6 en 15, of 10 en 15 tafels. We bekijken eerst het geval met 6 tafels op de kijklijn naar rechtsboven en 10 tafels op de kijklijn naar linksonder. Dan vinden we dat a (en d) een veelvoud is van 6 en bovendien dat c (en b) een veelvoud is van 10. Hieruit volgt dat a en c allebei ook veelvouden zijn van 2. Maar dan staan er op de kijklijn naar linksboven minstens 2 tafels; er staat namelijk ook nog een tafel $\frac{a}{2}$ rijen voor Esther en $\frac{c}{2}$ kolommen links van haar. Dat is in tegenspraak met de aanname dat er op deze kijklijn maar 1 tafel stond.

Dezelfde tegenspraak vinden we met de 6 en de 10 omgedraaid. Voor 6 en 15 geldt op dezelfde manier dat er zelfs minstens 3 tafels op de kijklijn naar linksboven liggen, aangezien 6 en 15 beide veelvouden van 3 zijn. En voor 10 en 15 geldt dit ook; dan liggen er zelfs minstens 5 tafels op de kijklijn naar linksboven.

In alle gevallen hebben we een tegenspraak, dus zo'n wedstrijdzaal bestaat niet.