

Tweede ronde

Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 15 maart 2024

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine of ander elektronisch hulpmiddel gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-opgaven hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.

LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$ of 3^{100} .

- B1.** Milou heeft 100 langwerpige enveloppen van verschillende formaten. Elke envelop heeft een breedte gelijk aan een van de gehele getallen $21, \dots, 30$ en een hoogte gelijk aan een van de gehele getallen $11, \dots, 20$ en elke combinatie komt precies één keer voor. Milou wil de enveloppen ordenen in stapeltjes. Een envelop mag alleen op een andere envelop worden gelegd als zowel de breedte als de hoogte kleiner is dan die van de envelop waar je hem op legt. De envelop van formaat 26×15 mag dus wel op die van 29×17 , maar niet op die van 29×15 of die van 26×17 . Wat is het kleinste aantal stapeltjes waarin Milou de enveloppen kan ordenen?
- B2.** Charlie heeft een dik boek van n pagina's waarin na het openslaan op de eerste pagina rechts het paginanummer 1 staat. Vervolgens zijn alle pagina's doorgenummerd zodat je, als je het boek zomaar ergens openslaat, links een even en rechts een oneven paginanummer ziet. De allerlaatste pagina vóór de achterkaft heeft een even nummer. Helaas heeft iemand een heel vel papier uit het boek gescheurd. Charlie telt het totaal aantal cijfers van de paginanummers op de $n - 2$ overgebleven pagina's en komt op een totaal van 2024 cijfers. (Let op: het gaat hier dus niet om de som van de paginanummers.)
Wat is n ?
- B3.** Op het Pythagoras Lyceum zitten in alle klassen maximaal 25 leerlingen. In één van de klassen wordt een enquête gehouden over van alles en nog wat en iedereen vult alle vragen in. In deze klas blijkt dat 31% van de leerlingen een zwarte fiets heeft en dat 94% van de leerlingen meer dan 1 km van school af woont. Deze percentages zijn afgerond naar het dichtstbijzijnde gehele getal. Hoeveel leerlingen zitten er in die klas?

- B4.** We definiëren het getal A als het cijfer 4 gevolgd door 2024 maal de cijfercombinatie 84, en het getal B door 2024 maal de cijfercombinatie 84 gevolgd door een 7. Ter illustratie hebben we dus

$$A = 4 \underbrace{84 \dots 84}_{4048 \text{ cijfers}} \quad \text{en} \quad B = \underbrace{84 \dots 84}_{4048 \text{ cijfers}} 7.$$

Vereenvoudig de breuk $\frac{A}{B}$ zoveel mogelijk.

- B5.** Van een regelmatige tienhoek $ABCDEFGHIJ$ met zijden van lengte 12 is M het middelpunt. Laat S het snijpunt zijn van MC en AD . Bereken het verschil tussen de omtrek van vierhoek $ABCD$ en de omtrek van driehoek DMS .

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met een gedeeltelijke oplossing kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook je kladpapier in.

LET OP: Maak elke C-opgave op een apart vel papier en lever ook het bijbehorende kladpapier per opgave in.

- C1.** Laat n een positief geheel getal zijn. Een sprinkhaan staat op de getallenlijn op het getal 1 en mag telkens ofwel een sprong maken van lengte 2, ofwel van lengte 3. De sprinkhaan moet telkens landen op een geheel getal van 1 tot en met n waar de sprinkhaan nog niet eerder geweest is. De sprinkhaan wil graag alle gehele getallen van 1 tot en met n precies éénmaal bezoeken en eindigen op het getal n . Bewijs dat dit kan voor alle $n \geq 9$.
- C2.** Eva bekijkt “woorden” bestaande uit n letters, elk gelijk aan ‘L’ of ‘R’. In een beurt mag Eva ergens in zo’n woord ‘RL’ door ‘LR’ vervangen. Zo maakt ze bijvoorbeeld in twee beurten van het woord ‘LRLRLRLR’ het woord ‘LRLRLRLR’. Als nergens een ‘L’ direct rechts van een ‘R’ staat, kan Eva geen beurt meer doen.
- (a) Eva heeft zo’n woord van lengte n . Bewijs dat Eva maar een eindig aantal beurten kan doen.
- (b) Gegeven $n > 1$ en ℓ met $0 < \ell < n$. Voor elk woord van lengte n met precies ℓ keer een ‘L’ noteert Eva hoeveel beurten ze maximaal kan zetten. Wat is het grootste getal dat ze heeft opgeschreven? (Geef je antwoord in termen van n en ℓ .)
Bewijs dat je antwoord correct is. Dat wil zeggen: geef een woord van lengte n met precies ℓ keer een letter ‘L’ waarvoor het maximum aantal beurten bereikt wordt en bewijs dat het maximum aantal beurten voor alle andere woorden van lengte n met precies ℓ keer een letter ‘L’ niet groter kan zijn.
- (c) Laat $n \geq 2$. Voor elk woord van lengte n (met 1 of meer keer een ‘L’ en 1 of meer keer een ‘R’) noteert Eva hoeveel beurten ze maximaal kan zetten. Hoeveel letters ‘L’ bevat het woord (of de woorden) waarvoor ze het grootste getal heeft opgeschreven? (Geef je antwoord in termen van n .)