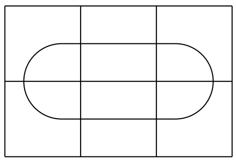
# Tweede ronde
# Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 11 maart 2022

## Uitwerkingen

## B-opgaven

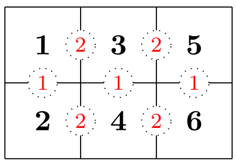
**B1.** 11 Voor twee naast elkaar gelegen vierkantjes noemen we het verschil tussen de getallen in de hokjes de *grensscore* van de gemeenschappelijke zijde. We bekijken de volgende manier om een rondje te lopen in de rechthoek.



We kijken eerst wat er gebeurt als je begint in het hokje met 1 en via dit rondje naar het hokje met 6 loopt. Als je op deze route telkens naar een groter getal stapt, dan zijn de grensscores die je onderweg tegenkomt samen precies gelijk aan 5. Als je tussen de 1 en de 6 ook een keer een stap naar een lager getal maakt, dan wordt de totale grensscore op de weg van 1 en 6 groter dan 5.

Voor de rest van het rondje, van het hokje met 6 terug naar het hokje met 1, geldt hetzelfde: de grensscores die je onderweg tegenkomt, zijn samen minimaal 5. Op het hele rondje zijn de grensscores samen dus minimaal gelijk aan 10. We hebben dan alleen de grensscore tussen de middelste twee vakjes nog niet meegeteld, en die is minimaal 1: de totale score is dus minimaal 11.

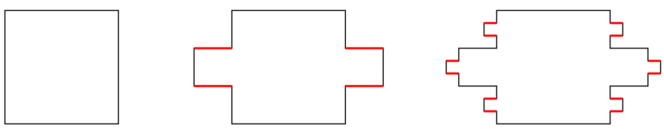
Hieronder zie je een verdeling met score 11 wat laat zien dat 11 de laagst mogelijke score is.




**B2.** 39 Als $k$ een even getal is, dan is $k^2$ even en dus nooit van de vorm $8n+1$. Als $k$ oneven is, zeg $k = 2\ell + 1$, dan geldt $k^2 = (2\ell+1)^2 = 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4\ell(\ell+1) + 1$. Een van de getallen $\ell$ of $\ell + 1$ is even en dus is $4\ell(\ell+1)$ een achtvoud en is $k^2$ van de vorm $8n + 1$.

We zien verder dat $8n+1$ minstens 9 is, het kwadraat van 3, en hoogstens $8 \cdot 800 + 1 = 6401$. We hoeven dus alleen nog uit te zoeken hoeveel oneven kwadraten er zijn die hier tussen liggen. We zien dat $80^2 = 6400$ nog kleiner is dan 6401 en dat $81^2 = 6561$ groter is dan 6401. De kwadraten die we zoeken, zijn dus $3^2, 5^2, 7^2, \ldots, 79^2$. Dat zijn in totaal 39 kwadraten.

**B3.** 84 De omtrek van de figuur bestaat uit horizontale en verticale lijnstukjes. Bij het aangroeien van een vierkantje wordt een verticaal lijnstuk opgesplitst en schuift het middelste deel daarvan opzij, waarbij de totale lengte van de verticale lijnstukjes hetzelfde blijft. We hoeven dus alleen te kijken wat er aan horizontale lijnstukjes extra bij komt; in de figuur hieronder zijn deze nieuwe stukjes rood gekleurd.



In de eerste minuut groeien er vier stukjes van lengte $\frac{1}{3}$ aan, dat is samen $\frac{4}{3}$. In de tweede minuut groeien er 12 stukjes van lengte $\frac{1}{9}$ aan, dat is samen ook $\frac{4}{3}$.

Elke minuut splitst elk verticaal lijnstukje in drieën, waardoor er elke volgende minuut drie keer zoveel vierkantjes aangroeien. Dus in iedere minuut groeien er drie keer zoveel stukjes aan als in de vorige minuut, maar ze zijn ook telkens $\frac{1}{3}$ van de lengte van de vorige stukjes. We concluderen dat er in elke minuut $\frac{4}{3}$ bij de omtrek van de figuur komt. Na 60 minuten is de omtrek dus $4 + 60 \cdot \frac{4}{3} = 84$.

**B4.** 20 Stel dat Lavinia $a$ gouden dozen koopt, $b$ zilveren en $c$ bronzen. Dan kunnen we het probleem dat we willen oplossen, omschrijven met behulp van de volgende vergelijkingen:

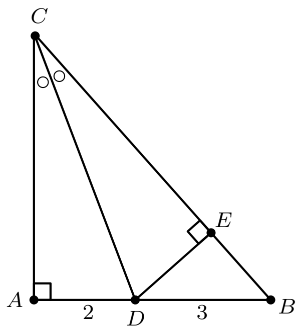
$$2a + b + 5c = 3a + 2b + c = a + 4b + 2c.$$

De eerste vergelijking $2a + b + 5c = 3a + 2b + c$ kunnen we herschrijven naar $4c - b = a$. Als we deze uitdrukking voor $a$ invullen in de tweede vergelijking vinden we

$$13c - b = 3b + 6c.$$

Dit kunnen we vereenvoudigen naar $7c = 4b$. Het getal 7 is priem en dat betekent dat $b$ deelbaar door 7 moet zijn (want 4 is niet deelbaar door 7). We schrijven $b = 7k$, met $k$ een geheel getal. Daaruit volgt dat $c = \frac{4}{7}b = 4k$ en $a = 4 \cdot 4k - 7k = 9k$. We zien dat $a$, $b$ en $c$ zo klein mogelijk zijn als $k$ zo klein mogelijk is. Lavinia koopt ten minste één doos chocolaatjes, dus moet $k = 1$ zijn en er volgt $a = 9$, $b = 7$ en $c = 4$. We zien dat Lavinia 45 chocolaatjes heeft van elke smaak. In totaal kocht ze dus minstens $9 + 7 + 4 = 20$ dozen.

**B5.** $2\sqrt{6}$ We tekenen een loodlijn vanuit $D$ op zijde $BC$; het voetpunt van de loodlijn noemen we $E$. Er geldt $\angle ACD = \angle ECD$. Verder zien we de rechte hoeken $\angle DAC = \angle DEC$. De driehoeken $ACD$ en $ECD$ hebben nu de zijde $CD$ gemeenschappelijk en twee gelijke hoeken, dus de driehoeken $ACD$ en $ECD$ zijn elkaars gespiegelde in $CD$. Hieruit volgt dat $|DE| = |DA| = 2$ en $|AC| = |EC|$.




Voor het vervolg gaan we drie keer de stelling van Pythagoras toepassen. Eerst doen we dat in driehoek $DEB$, dat geeft $2^2 + |EB|^2 = 3^2$ dus $|EB| = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Stel nu $x = |AC| = |EC|$. We passen nu de stelling van Pythagoras toe in driehoek $ABC$, dat geeft

$$x^2 + (2+3)^2 = (\sqrt{5} + x)^2 \quad \text{dus} \quad x^2 + 25 = 5 + 2\sqrt{5}x + x^2 \quad \text{dus} \quad 20 = 2\sqrt{5}x.$$

Hieruit volgt dat $x = 2\sqrt{5}$. De laatste keer dat we ten slotte de stelling van Pythagoras toepassen, is in driehoek $CDE$: dit geeft $2^2 + (2\sqrt{5})^2 = |CD|^2$ en dus $|CD| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

## C-opgaven

**C1.** Om te beginnen merken we een handige relatie tussen $a$, $b$, $d$ en $v$ op. Het totaal aantal getallen op de twee blaadjes samen is $a + b$, het aantal getallen op het blaadje van Alicia plus het aantal getallen op het blaadje van Britt. Maar dit is ook gelijk aan $v + d$: het totaal aantal verschillende getallen, plus het totaal aantal getallen dat op twee blaadjes staat. We vinden dus dat $a + b = v + d$.

(a) We kiezen $a = b = 2022$ en zoeken een oplossing voor $a \cdot b = d \cdot (v + d)$. We gebruiken dat $a + b = v + d$. Dat geeft dat we op zoek zijn naar een oplossing voor $a \cdot b = d \cdot (a + b)$. Als we $a = b = 2022$ invullen, vinden we dat $2022 \cdot 2022 = d(2022 + 2022) = d \cdot 2 \cdot 2022$ dus $d = 1011$. Dan geeft $a + b = v + d$ dat $2022 + 2022 = v + 1011$, dus $v = 3033$. Deze situatie kan bijvoorbeeld ontstaan als Alicia de getallen 1 tot en met 2022 opschrijft en Britt de getallen 1012 tot en met 3033. □

(b) Met een beetje puzzelen, en $d$ niet te groot kiezen, vinden we dat $a = b = 3$, $d = 1$ en $v = 5$ een oplossing is: $3 \cdot 3 = 1 \cdot (5 + 4)$. Deze getallen voldoen ook aan onze vergelijking $a + b = v + d$. Deze situatie kan bijvoorbeeld ontstaan als Alicia de getallen 1, 2 en 3 opschrijft en Britt de getallen 3, 4 en 5. □

(c) Stel dat er getallen zijn zodat $a \cdot b = v \cdot d$. We hebben aan het begin gevonden dat $a + b = v + d$, oftewel $v = a + b - d$. Dit invullen geeft dat

$$ab = vd = (a + b - d)d = ad + bd - d^2.$$

Als we nu aan de linker- en rechterkant van deze vergelijking $ad$ aftrekken, vinden we $ab - ad = bd - d^2$, oftewel $a(b - d) = d(b - d)$. Omdat Britt minstens één getal heeft opgeschreven dat Alicia niet heeft, geldt dat $b > d$. We kunnen de vergelijking $a(b - d) = d(b - d)$ dus delen door het positieve getal $b - d$ en dan vinden we dat $a = d$. Anderzijds heeft Alicia minstens één getal opgeschreven dat Britt niet heeft, dus $a > d$. Dat is een tegenspraak, dus kunnen er geen getallen bestaan met $a \cdot b = v \cdot d$. □

**C2.** (a) We kijken eerst naar de laatste twee cijfers van een zonnig getal. Daarvoor zijn de volgende negen mogelijkheden: 01, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 en 89. Als we dan kijken naar het dubbele van een zonnig getal, dan krijgen we respectievelijk de volgende negen mogelijkheden voor de laatste twee cijfers: 02, 24, 46, 68, 90, 12, 34, 56 en 78. We zien dat het dubbele dus alleen een zonnig getal kan zijn als het oorspronkelijke zonnige getal eindigt op 56, 67, 78 of 89. In alle vier de gevallen zien we dat er in de verdubbeling ook een 1 overspringt naar de honderdtallen.

Nu kijken we naar de eerste twee cijfers van het zonnige getal. De negen mogelijkheden zijn 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 en 98. Als het eerste cijfer 5 of hoger is, dan hebben we na verdubbeling in totaal vijf cijfers en krijgen we sowieso geen zonnig getal. De overgebleven mogelijkheden zijn 10, 21, 32 en 43. Na verdubbeling en het toevoegen van de 1 bij de honderdtallen krijgen we respectievelijk 21, 43, 65 en 87. In alle gevallen is het dubbele van een zonnig getal weer een zonnig getal, zolang de eerste cijfers van het oorspronkelijke zonnige getal 10, 21, 32 of 43 zijn en de laatste twee cijfers 56, 67, 78 of 89. In totaal zijn er $4 \cdot 4 = 16$ combinaties die we kunnen maken en dus 16 zonnige getallen waarvoor het dubbele weer een zonnig getal is. □

(b) Noem de middelste twee cijfers van een zonnig getal $a$ en $b$. Dan zijn de buitenste twee cijfers $a+1$ en $b+1$, dus het getal is $1000(a+1) + 100a + 10b + (b+1) = 1100a + 11b + 1001$. Dit getal is deelbaar door 11 omdat zowel $1100a$ als $11b$ als $1001 = 91 \cdot 11$ deelbaar is door 11. Na deling door 11 krijgen we het getal $100a + b + 91$. Nu is $b$ hooguit 8, want $b + 1$ moet ook een cijfer zijn. Verder is $a$ minstens 1, omdat het oorspronkelijke zonnige getal groter dan 2000 moet zijn. Daardoor zien we dat $100a + b + 91 = 100a + 10 \cdot 9 + (b + 1)$ het driecijferige getal is met de cijfers $a$, 9 en $b + 1$, een getal van drie cijfers met een 9 in het midden. □