Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 maart 2020

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. 49999 We noteren de cijfersom van een getal n als $S(n)$. We zoeken het kleinste positieve gehele getal n dat aan de volgende eis voldoet:

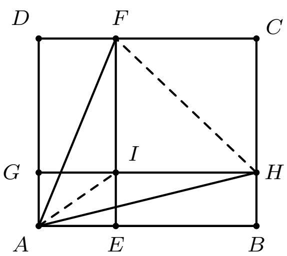
- $S(n)$ en $S(n+1)$ zijn allebei deelbaar door 5.

Het laatste cijfer van n moet wel een 9 zijn. Als dit niet zo was, dan zou $S(n+1)$ gelijk zijn aan $S(n)+1$, want het laatste cijfer van $n+1$ is één groter dan dat van n en de overige cijfers zijn hetzelfde. Echter, $S(n)$ en $S(n)+1$ kunnen niet allebei deelbaar zijn door 5, want dan zou ook het verschil $S(n+1)-S(n)=1$ deelbaar zijn door 5.

Het getal n eindigt dus op één of meer cijfers 9, zeg op k cijfers 9. Als we 1 bij n optellen, veranderen die k cijfers 9 elk in het cijfer 0 en wordt het cijfer ervóór met 1 verhoogd (als n uit enkel cijfers 9 bestaat dan bestaat $n+1$ uit het cijfer 1 gevolgd door k nullen). Er geldt dus dat $S(n+1)=S(n)-9\cdot k+1$. Omdat $S(n+1)$ en $S(n)$ allebei deelbaar zijn door 5, is ook het verschil $S(n)-S(n+1)=9k-1$ deelbaar door 5. De kleinste k waarvoor $9k-1$ deelbaar is door 5, is $k=4$.

Omdat $S(9999)=36$ niet deelbaar is door 5, proberen we vervolgens de getallen van vijf cijfers die eindigen op vier cijfers 9. Het eerste cijfer van n noemen we a (dus n wordt geschreven als $a9999$). De cijfersom $S(n)=a+4\cdot 9=a+36$ moet deelbaar zijn door 5. De kleinste a waarvoor dit geldt, is $a=4$. Omdat $S(49999)=40$ en $S(50000)$ deelbaar zijn door 5, voldoet $n=49999$ inderdaad aan de eis. Dit is dus het kleinste getal dat aan de eis voldoet.

B2. $24\frac{1}{5}$ In plaats van het hele parallellogram $AHJF$ bekijken we eerst de helft daarvan: driehoek AFH. We kunnen driehoek AFH in drie kleinere driehoeken opdelen: AFI, FIH en HIA. Als we de oppervlakte van driehoek AFI berekenen met de formule $\frac{1}{2}\cdot$ basis $\cdot$ hoogte en FI als basis nemen, dan zien we dat het precies de helft van de oppervlakte is van rechthoek $DFIG$. De oppervlakte van driehoek FIH is de helft van de oppervlakte van rechthoek $CHIF$ en de oppervlakte van driehoek HIA is de helft van de oppervlakte van rechthoek $BHIE$.



De totale oppervlakte van het parallellogram, twee keer de oppervlakte van driehoek AHF, is dus de som van de oppervlaktes van rechthoeken $DFIG$, $CHIF$ en $BHIE$. De laatste twee oppervlaktes zijn 12 en 5. We hoeven dus alleen nog de oppervlakte van $DFIG$ te vinden. Die is gelijk aan

$$|GI|\cdot|FI|=\frac{(|GI|\cdot|IE|)\cdot(|FI|\cdot|IH|)}{|IH|\cdot|IE|}=\frac{3\cdot 12}{5}=7\tfrac{1}{5}.$$

De totale oppervlakte van $AHJF$ is dus $5+12+7\frac{1}{5}=24\frac{1}{5}$.

B3. 43 In het plaatje hiernaast staan de posities aangegeven waar vierkantje f6 terecht komt bij het vouwen. We beginnen op f6 (na 0 keer vouwen). Daarna komt ons vierkantje op posities f3, c3, c2, b2, b1 en a1 terecht.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								
7								
6						0		
5								
4								
3			2			1		
2		4	3					
1	6	5						

Iedere keer dat we vouwen, keert de volgorde van de stapel om: de vierkantjes die onder f6 lagen komen boven f6 te liggen, en omgekeerd. Bovendien komt de stapel bovenop een even hoge stapel andere vierkantjes. Na k keer vouwen bestaat de stapel uit 2^k vierkantjes. Als er dan a vierkantjes boven f6 en b vierkantjes onder f6 liggen, dan liggen er na $k+1$ keer vouwen b vierkantjes boven f6 en $a + 2^k$ vierkantjes onder f6. We krijgen zo de volgende tabel.

Aantal keer vouwen	0	1	2	3	4	5	6
Vierkantjes in stapel	1	2	4	8	16	32	64
Vierkantjes boven f6	0	0	1	2	5	10	21
Vierkantjes onder f6	0	0+1=1	0+2=2	1+4=5	2+8=10	5+16=21	10+32=42

Na zes keer vouwen liggen er 42 vierkantjes onder f6, dus krijgt f6 nummer 43.

B4. 100 We nummeren de kabouters op volgorde rond de kring. De kabouter met het kleinste aantal kastanjes geven we nummer 1. Haar linker buurvrouw is kabouter 2, de linker buurvrouw van kabouter 2 is kabouter 3, en zo verder tot en met kabouter 100, die de rechter buurvrouw van kabouter 1 is. Het aantal kastanjes van kabouter k noemen we a_k.

We bekijken nu de twee buren van kabouter 1. De rechter buurvrouw heeft a_{100} kastanjes. Omdat $a_1 < a_{100}$, geeft de deling van a_1 door a_{100} rest a_1. Deze rest a_1 staat op het groene briefje van kabouter 1. De linker buurvrouw van kabouter 1 heeft a_2 kastanjes. Omdat $a_2 > a_1$, geeft de deling van a_2 door a_1 een rest r die kleiner is dan a_1. Deze rest r staat op het groene briefje van kabouter 2. De twee getallen die op de honderd groene briefjes voorkomen zijn dus de twee getallen a_1 en r.

We bekijken nu kabouters 1 tot en met 99. We bewijzen dat $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. Stel maar dat dat niet het geval zou zijn. Voor zekere k zou dan gelden $a_{k+1} < a_k$ (gelijkheid kan niet gelden omdat iedereen een ander aantal kastanjes heeft). De rest van a_{k+1} bij deling door a_k is dus a_{k+1} en dat is het getal op het groene briefje van kabouter $k+1$. Dit getal moet dus gelijk zijn aan a_1 of aan r. Maar dat is onmogelijk, want $a_1 < a_{k+1}$ (kabouter 1 heeft het kleinste aantal kastanjes) en r is zelfs kleiner dan a_1. We concluderen dat inderdaad geldt dat $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$.

Als we nu kijken naar de getallen op de rode briefjes van kabouters 1 tot en met 99, dan zien we dat dat de getallen a_1 tot en met a_{99} zijn. Het getal op het rode briefje van kabouter 100 is de rest bij deling van a_{100} door a_1. Deze rest is kleiner dan a_1, dus de honderd getallen op de rode briefjes zijn allemaal verschillend.

B5. 02 We zien dat $a_{2000} = a_{1999} \cdot 2000$ op drie nullen eindigt. We kunnen de laatste cijfers van a_{2001}, a_{2002} tot en met a_{2020} nu bepalen met behulp van de formules. Het is hierbij alleen van belang om de laatste twee cijfers bij te houden, de rest laten we weg.

a_{2001}	a_{2002}	a_{2003}	a_{2004}	a_{2005}	a_{2006}	a_{2007}
$0+1=1$	$1+2=3$	$3+3=6$	$6+4=10$	$10+5=15$	$15+6=21$	$21+7=28$

a_{2008}	a_{2009}	a_{2010}	a_{2011}	a_{2012}	a_{2013}	a_{2014}
$28 \cdot 8 = 224$	$24+9=33$	$33+10=43$	$43+11=54$	$54+12=66$	$66+13=79$	$79+14=93$

a_{2015}	a_{2016}	a_{2017}	a_{2018}	a_{2019}	a_{2020}	
$93+15=108$	$8 \cdot 16 = 128$	$28+17=45$	$45+18=63$	$63+19=82$	$82+20=102$	

We zien dat a_{2020} eindigt op de cijfers 02.

C-opgaven

C1. (a) We merken op dat $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. We zien dus dat $n! \cdot (n+1)! = (n!)^2 \cdot (n+1)$. Aangezien $(n!)^2$ zelf een kwadraat is, is dat product precies dan een kwadraat wanneer $n+1$ een kwadraat is. Voor $1 \leqslant n \leqslant 100$ is dat het geval voor $n = 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99$ (de kwadraten min één onder de 100). □

(b) We herschrijven het product $n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)! \cdot (n+3)!$ als:

$$(n!)^2 \cdot (n+1) \cdot (n+2)! \cdot (n+3)! = (n!)^2 \cdot (n+1) \cdot ((n+2)!)^2 \cdot (n+3).$$

Omdat $(n!)^2$ en $((n+2)!)^2$ beide kwadraten zijn, is dit product precies dan een kwadraat als $(n+1)(n+3)$ een kwadraat is. We laten zien dat $(n+1)(n+3)$ echter geen kwadraat kan zijn. Stel immers dat $(n+1)(n+3) = k^2$ wel een kwadraat zou zijn. Omdat $(n+1)^2 < (n+1)(n+3) < (n+3)^2$ zou moeten gelden dat $n+1 < k < n+3$, oftewel $k = n+2$. Dat kan niet, want $(n+1)(n+3) = (n+2)^2 - 1$ en dat is niet gelijk aan $(n+2)^2$. □

C2. Een achthoek kan opgesplitst worden in zes driehoeken (zie de linker figuur). De hoeken van de zes driehoeken samen zijn gelijk aan de acht hoeken van de achthoek samen. Omdat van elke driehoek de hoekensom 180 graden is, zijn de acht hoeken van de achthoek samen $6 \cdot 180° = 1080°$. In een regelmatige achthoek is elke hoek dus $\frac{1}{8} \cdot 1080° = 135°$.

We bekijken nu de figuur uit de opgave (zie rechter figuur). Het lijnstuk BP deelt hoek ABC precies doormidden, dus $\angle ABP = \angle PBC = 67\frac{1}{2}°$. Omdat driehoeken ABP en BCP gelijkbenig zijn (vanwege $|AB| = |AP|$ en $|BC| = |CP|$), geldt ook dat $\angle APB = \angle BPC = 67\frac{1}{2}°$ en $\angle BAP = \angle BCP = 180° - 135° = 45°$.

In driehoeken ABQ en BCR zijn alle zijden even lang. Die driehoeken zijn dus gelijkzijdig en alle hoeken zijn $60°$. Hieruit leiden we af dat $\angle PAQ = \angle BAQ - \angle BAP = 15°$. Evenzo geldt $\angle PCR = 15°$. Driehoeken PAQ en PCR zijn bovendien gelijkbenig (want $|AP| = |AQ|$ en $|CP| = |CR|$) en dus geldt $\angle APQ = \frac{1}{2}(180° - 15°) = 82\frac{1}{2}°$ en ook $\angle CPR = 82\frac{1}{2}°$.

Wegens spiegelsymmetrie zijn PQ en PR even lang en is driehoek PQR dus gelijkbenig met tophoek P. Bovendien hebben we alle hoeken bij P berekend, behalve $\angle QPR$. We leiden af dat

$$\angle QPR = 360° - \angle APQ - \angle APB - \angle BPC - \angle CPR = 360° - 2 \cdot 67\tfrac{1}{2}° - 2 \cdot 82\tfrac{1}{2}° = 60°.$$

Samen met de gelijkbenigheid van PQR volgt hieruit direct dat PQR gelijkzijdig is. □