Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 maart 2020

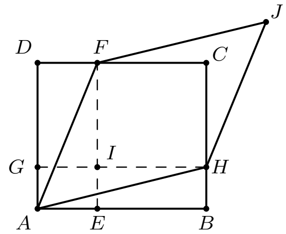
- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi+1$ of 3^{100}.

B1. De *cijfersom* van een getal krijg je door de cijfers van het getal bij elkaar op te tellen. De cijfersom van 1303 is bijvoorbeeld $1+3+0+3=7$.
Vind het kleinste positieve gehele getal n waarvoor geldt dat de cijfersom van n en de cijfersom van $n+1$ allebei deelbaar zijn door 5.

B2. Rechthoek $ABCD$ is verdeeld in vier rechthoeken zoals in de figuur. De oppervlakte van rechthoek $AEIG$ is 3, de oppervlakte van rechthoek $EBHI$ is 5 en de oppervlakte van rechthoek $IHCF$ is 12.
Wat is de oppervlakte van het parallellogram $AHJF$?



B3. We hebben een vierkant vel papier op tafel liggen dat verdeeld is in $8\times 8=64$ gelijke vierkantjes. Die vierkantjes zijn genummerd van **a1** tot en met **h8** zoals bij een schaakbord (zie fig. 1). We gaan nu vouwen, waarbij het vierkantje **a1** steeds op een vaste plaats op tafel blijft liggen. Eerst vouwen we om het horizontale midden (fig. 1). Het vierkantje **a8** komt daardoor dus bovenop vierkantje **a1** te liggen. Daarna vouwen we om het verticale midden (fig. 2). Vervolgens vouwen we weer om het dan ontstane horizontale midden (fig. 3), et cetera. Na zes keer vouwen hebben we dan een pakketje voor ons (fig. 7) dat je kunt beschouwen als een stapeltje van 64 vierkante stukjes papier.

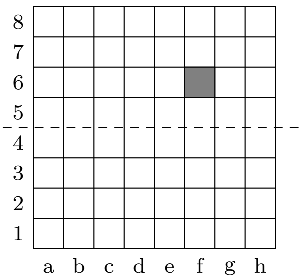


fig. 1

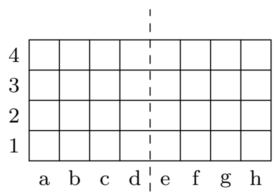


fig. 2

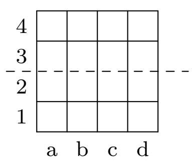


fig. 3

...

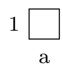


fig. 7

De vierkantjes van het ontstane stapeltje nummeren we van onder naar boven van 1 tot en met 64. Vierkantje **a1** krijgt dus nummer 1.
Welk nummer krijgt vierkantje **f6**?

B4. Honderd kabouters (vrouwelijke scouts) zitten in een grote kring om het kampvuur. Elke kabouter heeft één of meer kastanjes en geen twee kabouters hebben hetzelfde aantal kastanjes. Elke kabouter deelt haar aantal door het aantal van haar *rechter* buurvrouw en schrijft de rest op een groen briefje. Elke kabouter deelt haar aantal ook door het aantal van haar *linker* buurvrouw en schrijft die rest op een rood briefje. Als bijvoorbeeld Anja 23 kastanjes heeft en haar rechter buurvrouw Bregje heeft er 5, dan schrijft Anja dus 3 op haar groene briefje en schrijft Bregje 5 op haar rode briefje.

Als het aantal verschillende resten op de 100 groene briefjes gelijk is aan 2, wat is dan het kleinst mogelijke aantal verschillende resten op de 100 rode briefjes?

B5. Gegeven is de rij getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$. Er geldt $a_0 = 0$. Bovendien geldt voor elke $k = 1, 2, \ldots, 2020$ dat

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} \cdot k & \text{als } k \text{ deelbaar is door 8,} \\ a_{k-1} + k & \text{als } k \textit{ niet} \text{ deelbaar is door 8.} \end{cases}$$

Wat zijn de laatste twee cijfers van a_{2020}?

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met een gedeeltelijke oplossing kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook je kladpapier in.

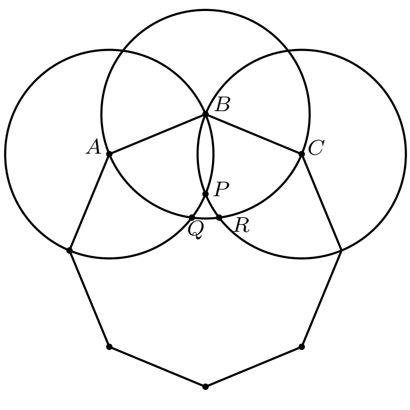
LET OP: Maak elke C-opgave op een apart vel papier en lever ook het bijbehorende kladpapier per opgave in.

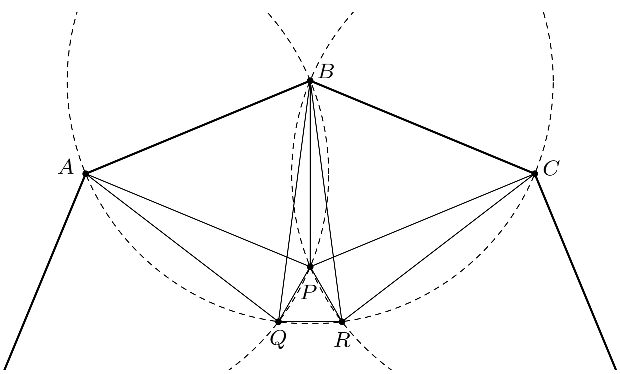
C1. Als we voor een positief geheel getal n alle getallen van 1 tot en met n met elkaar vermenigvuldigen, dan noteren we de uitkomst als $n!$ ('n faculteit'). Dus bijvoorbeeld $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

(a) Vind alle gehele getallen n met $1 \leqslant n \leqslant 100$ zo dat $n! \cdot (n+1)!$ het kwadraat van een geheel getal is. *Geef hierbij ook een bewijs dat je alle getallen gevonden hebt.*

(b) Bewijs dat voor geen enkel positief geheel getal n geldt dat $n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)! \cdot (n+3)!$ het kwadraat van een geheel getal is.

C2. Drie opeenvolgende hoekpunten A, B en C van een regelmatige achthoek zijn de middelpunten van cirkels die door de naburige hoekpunten gaan. De snijpunten P, Q en R van de drie cirkels, zoals in de figuur weergeven, vormen een driehoek.





Bewijs dat driehoek PQR gelijkzijdig is.