Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 15 maart 2019

Uitwerkingen

B-opgaven

1. 42 Moeder verlaat het huis 10 minuten na het vertrek van Anna en Birgit. Na 10 minuten rijden haalt zij Anna in. Immers, Anna heeft dan $10+10$ minuten gefietst, maar gaat half zo snel als moeder. Na 10 minuten terugrijden passeert moeder het huis op weg richting Birgit. Na nog 6 minuten rijden haalt zij Birgit in. Immers, Birgit heeft dan al $10+10+10+6=36$ minuten gelopen, maar zij gaat ook zes keer zo langzaam als moeder. Na nog 6 minuten rijden is moeder weer thuis. Dat is precies $10+10+10+6+6=42$ minuten na het vertrek van Anna en Birgit.

2. 11 Stel dat we 11 lootjes gepakt hebben met de getallen $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11}$ erop zodat er geen drie lootjes bij zitten die aan onze wens voldoen. We weten ten eerste dat $a_1 \geqslant 1$ en $a_2 \geqslant 2$. Omdat het drietal a_1, a_2 en a_3 niet aan onze wens voldoet, moet er wel gelden dat $a_3 \geqslant a_1 + a_2 \geqslant 1+2=3$. We gaan dan verder met het drietal a_2, a_3 en a_4 en vinden $a_4 \geqslant a_2 + a_3 \geqslant 2+3=5$. Als we zo doorgaan vinden we

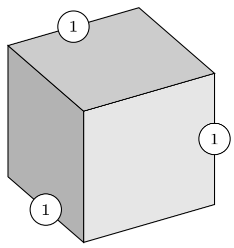
$$a_5 \geqslant 3+5=8, \qquad a_6 \geqslant 5+8=13, \qquad a_7 \geqslant 8+13=21, \qquad a_8 \geqslant 13+21=34,$$

$$a_9 \geqslant 21+34=55, \qquad a_{10} \geqslant 34+55=89 \qquad \text{en} \qquad a_{11} \geqslant 55+89=144.$$

Het grootste getal dat op een lootje voorkomt, is echter 100. Dus dit kan helemaal niet en we zien dat er altijd drie lootjes moeten zijn die aan onze wens voldoen als we 11 lootjes pakken.

Bovendien is 10 lootjes niet genoeg. Als we namelijk de lootjes 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 en 89 pakken, dan hebben we geen drietal lootjes dat aan onze wens voldoet.

3. -12 We laten eerst zien dat de uitkomst altijd -12 of meer is. In het geval dat we op elk van de twaalf ribben een -1 schrijven, komt er in elk zijvlak een 1. In dat geval krijgen we als uitkomst $-12+6=-6$. Voor elke -1 op een ribbe die we in een 1 veranderen, veranderen hooguit twee zijvlakken van een 1 in een -1. De uitkomst wordt daarmee hooguit 2 lager ($-1+1+1$ wordt $1-1-1$). Om onder de -12 te komen moeten we dus op minstens 4 ribben een 1 schrijven. Echter, in dat geval is de uitkomst minstens $(4-8)-6=-10$. De uitkomst zal dus nooit lager dan -12 zijn.



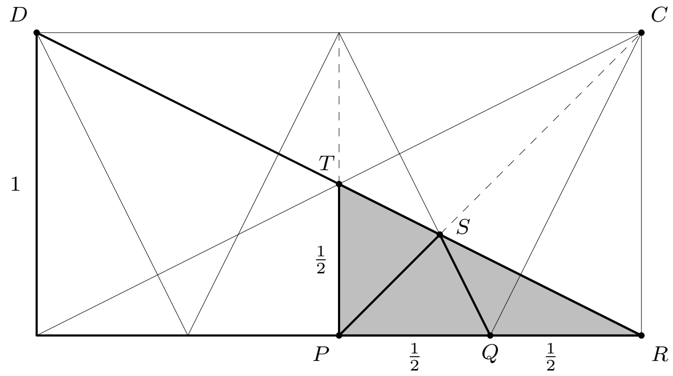
Tot slot laten we zien dat je -12 zelf wel als uitkomst kunt krijgen. We schrijven daartoe op elke ribbe een -1, behalve op de drie ribben aangegeven in de figuur. Van elk zijvlak staat op precies drie ribben een -1. Op elk zijvlak komt dus een -1 te staan. De uitkomst is daarom $(3-9)-6=-12$.

4. 666 en 1999 We bekijken de gevallen n *even* en n *oneven* apart.

Stel eerst dat n *even* is. We schrijven $n=2k$ met k een geheel getal. We krijgen dan: $n^2=4k^2$ en $2n+1=4k+1$. Als we $4k^2$ door $4k+1$ delen, dan is de uitkomst $k-1$ en de rest is $4k^2-(k-1)(4k+1)=3k+1$. Omdat de rest 1000 moet zijn, vinden we $3k+1=1000$ en dus $k=333$. Dit geeft de oplossing $n=2\cdot 333=666$.

Stel nu dat n juist *oneven* is. We kunnen dan schrijven $n=2k+1$ met k een geheel getal. We krijgen dan: $n^2=4k^2+4k+1$ en $2n+1=4k+3$. Als we $4k^2+4k+1$ delen door $4k+3$, dan is de uitkomst k en de rest is $4k^2+4k+1-k(4k+3)=k+1$. Omdat de rest 1000 moet zijn, vinden we $k+1=1000$ en dus $k=999$. Dit geeft de oplossing $n=2\cdot 999+1=1999$.

5. $\frac{2}{3}$ In de figuur is de bovenste helft van het vierkant afgebeeld. Driehoek PST en driehoek PSQ zijn elkaars gespiegelde in lijn PC. Van elk is de oppervlakte gelijk aan een achtste van de achthoek. Driehoek QRS heeft dezelfde oppervlakte als PSQ want beide driehoeken hebben een basis van $\frac{1}{2}$ en ze hebben gelijke hoogte. De drie driehoeken samen vormen de grijze driehoek in de figuur met basis 1 en hoogte $\frac{1}{2}$. De grijze driehoek heeft dus oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ en elk van de drie kleine driehoeken heeft oppervlakte $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. De oppervlakte van de achthoek is dus $8 \cdot \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.



C-opgaven

C1. (a) Een voorbeeld van een rijtje dat voldoet, is $5, 7, 6, 3, 1, 2$. Dit rijtje bestaat uit zes verschillende getallen en is 2-delig, aangezien $5 + 6 + 1 = 7 + 3 + 2$. Ook is het 3-delig, aangezien $5 + 3 = 7 + 1 = 6 + 2$.

Dit is een voorbeeld van een goede oplossing. Er zijn nog veel meer rijtjes mogelijk. Hieronder laten we zien hoe wij op dit rijtje gekomen zijn.

We zoeken een rijtje $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ dat 2-delig en 3-delig is. Dan moet dus gelden dat

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_5 = a_3 + a_6 \qquad \textit{en} \qquad a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6.$$

Als we kiezen $a_4 = -a_1$, $a_5 = -a_2$ en $a_6 = -a_3$, dan is aan de eerste twee vergelijkingen al voldaan. De derde vergelijking geeft dan $a_1 + a_3 - a_2 = a_2 - a_1 - a_3$, oftewel $a_1 + a_3 = a_2$. We kiezen $a_1 = 1$, $a_3 = 2$ en dus $a_2 = 3$. We krijgen dan het rijtje $1, 3, 2, -1, -3, -2$ bestaande uit zes verschillende getallen. We kunnen eventueel alle zes getallen met 4 verhogen om een rijtje met alleen positieve getallen te krijgen: $5, 7, 6, 3, 1, 2$.

(b) Een voorbeeld van een rijtje dat voldoet, is $8, 17, 26, 27, 19, 10, 1$. Dit rijtje van zeven verschillende getallen is 2-delig, aangezien $8+26+19+1 = 17+27+10$. Het is 3-delig, want $8+27+1 = 17+19 = 26+10$. Ook is het 4-delig, aangezien $8+19 = 17+10 = 26+1 = 27$.

Dit is een voorbeeld van een goede oplossing. Er zijn nog veel meer rijtjes mogelijk. Hieronder laten we zien hoe wij op dit rijtje gekomen zijn.

We zoeken een rijtje $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ dat 2-, 3- en 4-delig is. Dan moet dus gelden:

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6, \tag{1}$$

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_2 + a_5 = a_3 + a_6, \tag{2}$$

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_6 = a_3 + a_7 = a_4. \tag{3}$$

Wat meteen opvalt, is dat in vergelijking (1) er aan de linkerkant $a_1 + a_5$ en $a_3 + a_7$ staat en aan de rechterkant $a_2 + a_6$ en a_4. Als het rijtje 4-delig is, zijn die alle vier gelijk. We zien dus dat een 4-delig rijtje ook automatisch 2-delig is.

Uit de vergelijkingen in (3) volgt

$$a_1 = a_4 - a_5, \qquad a_2 = a_4 - a_6, \qquad a_3 = a_4 - a_7.$$

Als we dat invullen in de vergelijkingen (2), dan krijgen we

$$2a_4 + a_7 - a_5 = a_4 + a_5 - a_6 = a_4 + a_6 - a_7.$$

Door overal a_4 vanaf te trekken, vinden we

$$a_4 + a_7 - a_5 = a_5 - a_6 = a_6 - a_7.$$

We vinden dus dat

$$\begin{aligned} a_4 &= (a_5 - a_6) - (a_7 - a_5) = 2a_5 - a_6 - a_7, \\ a_5 &= (a_6 - a_7) + a_6 = 2a_6 - a_7. \end{aligned}$$

We hebben dus a_1, a_2, a_3, a_4 en a_5 uitgedrukt in a_6 en a_7. Elke oplossing vinden we door een geschikte keuze van a_6 en a_7 waarbij alle zeven getallen verschillend worden. We proberen $a_6 = 10$ en $a_7 = 1$ en vinden achtereenvolgens:

$$a_5 = 2 \cdot 10 - 1 = 19, \qquad a_4 = 2 \cdot 19 - 10 - 1 = 27, \qquad a_3 = 27 - 1 = 26,$$

$$a_2 = 27 - 10 = 17 \qquad \textit{en} \qquad a_1 = 27 - 19 = 8.$$

We vinden zo dus een oplossing.

(c) De grootste k waarvoor er een k-delig rijtje van 99 verschillende getallen bestaat, is $k = 50$. Een voorbeeld van zo'n rijtje is

$$1, 2, \ldots, 48, 49, 100, 99, 98, \ldots, 52, 51.$$

De 99 getallen in het rijtje zijn inderdaad verschillend en we zien dat $1 + 99 = 2 + 98 = \ldots = 48 + 52 = 49 + 51 = 100$, dus dit rijtje is 50-delig.

Stel nu dat $k > 50$ en dat we een rijtje $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ hebben dat k-delig is. Bekijk het groepje dat a_{49} bevat. Omdat $49 - k < 0$ en $49 + k > 99$, kan dit groepje naast a_{49} geen andere getallen bevatten. Bekijk vervolgens het groepje dat a_{50} bevat. Omdat $50 - k < 0$ en $50 + k > 99$, kan dit groepje naast a_{50} geen andere getallen bevatten. De getallen a_{49} en a_{50} zitten allebei dus alleen in een groepje en moeten daarom gelijk zijn. Dit mag echter niet, want de getallen moesten verschillend zijn.

C2. (a) De jaartallen 2103 t/m 2109 zijn zeven opeenvolgende interessante jaartallen. Als er een eerder zevental is, dan moet dat beginnen voor 2100. We zullen nu bewijzen dat er geen eerdere mogelijkheid is.

Omdat een interessant jaartal niet op cijfers 99 kan eindigen, zijn de eerste twee cijfers van een rij opeenvolgende interessante jaartallen (van vier cijfers) steeds hetzelfde. Stel nu dat we zeven opeenvolgende jaartallen hebben die beginnen met 20. De zeven laatste cijfers zijn opeenvolgend en ongelijk aan 0 en 2, en dus ook ongelijk aan 1. De zeven laatste cijfers moeten dus de cijfers 3 t/m 9 zijn, en ook in die volgorde. Het derde cijfer moet dan wel het enige overgebleven cijfer zijn, namelijk 1. We zien dat 2013 tot en met 2019 het enige zevental opeenvolgende interessante jaartallen is tussen 2000 en 2100.

(b) Stel dat er wel acht opeenvolgende interessante jaartallen zouden zijn tussen 1000 en 9999. Omdat een interessant jaartal niet op 99 kan eindigen, zijn de eerste twee cijfers bij de acht jaartallen gelijk. Als ook het derde cijfer steeds hetzelfde zou zijn, dan blijven er maar 7 mogelijkheden over voor het laatste cijfer, dus dat is niet mogelijk. Er zijn dus twee opeenvolgende jaartallen uit ons rijtje van de vorm $abc9$ en $abd0$ met $d = c + 1$. Omdat er acht verschillende laatste cijfers zijn, moeten dat precies de acht cijfers ongelijk aan a en b zijn. Zowel c als $d = c + 1$ moeten dus voorkomen als laatste cijfer. Omdat de getallen $abcc$ en $abdd$ niet mogen voorkomen, moeten in ons rijtje van acht jaartallen zowel $abcd$ als $abdc$ voorkomen. Het verschil tussen die twee getallen is echter 9 en ons rijtje bestaat uit acht opeenvolgende getallen. Dat kan dus niet. We hebben een tegenspraak afgeleid en concluderen dat de aanname dat er wel acht opeenvolgende interessante jaartallen tussen 1000 en 9999 zijn, fout is.