

Tweede ronde

Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 17 maart 2017

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.

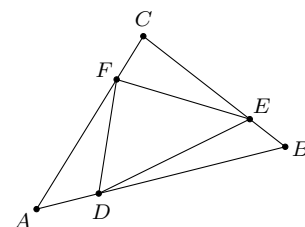
LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$ of 3^{100} .

- B1.** We noemen een rij van opeenvolgende positieve gehele getallen *evenwichtig* als het aantal drievouden in die rij gelijk is aan het aantal vijfouden. Zo is de rij 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 niet evenwichtig, want van deze 7 getallen zijn er 3 een drievoud (namelijk 30, 33 en 36) en maar 2 een vijfvoud (namelijk 30 en 35).

Uit hoeveel getallen bestaat een evenwichtige rij van opeenvolgende positieve gehele getallen maximaal?

- B2.** Gegeven is een driehoek ABC met oppervlakte 40. Op zijde AB ligt punt D zodanig dat $|BD| = 3 \cdot |AD|$. Op zijde BC ligt punt E zodanig dat $|CE| = 3 \cdot |BE|$. Op zijde CA ligt punt F zodanig dat $|AF| = 3 \cdot |CF|$.

Bepaal de oppervlakte van driehoek DEF .

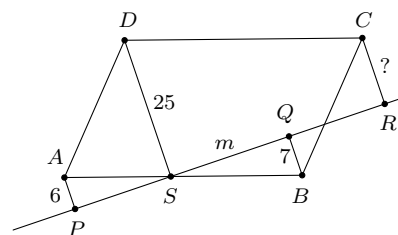


- B3.** Een leerling heeft tijdens de wiskundeles een rij van 16 getallen op het bord geschreven. Een tweede leerling uit de klas schrijft onder elk getal hoe vaak dit getal in de rij voorkomt. Dat geeft een tweede rij van 16 getallen. Een derde leerling schrijft onder elk getal van de tweede rij hoe vaak het in die rij voorkomt. Dat geeft een derde rij getallen. Zo maken achtereenvolgens ook een vierde, vijfde, zesde en zevende leerling elk een rij getallen uit de rij ervoor. Na afloop blijken de eerste zes rijen allemaal verschillend te zijn. De zevende rij blijkt gelijk te zijn aan de zesde rij.

Geef een mogelijke rij die de eerste leerling opgeschreven kan hebben.

- B4.** Een parallellogram $ABCD$ wordt gesneden door een lijn m . Vanuit de vier hoekpunten A , B , C en D laten we loodlijnen neer op lijn m . De voetpunten van deze loodlijnen zijn respectievelijk P , Q , R en S . Punt S is ook precies het snijpunt van lijn m en AB . De lengten van lijnstukken AP , BQ en DS zijn respectievelijk 6, 7 en 25.

Wat is de lengte van CR ? *Let op: het plaatje is niet op schaal.*



B5. Simon heeft 2017 blauwe blokjes die genummerd zijn van 1 tot en met 2017. Hij heeft ook 2017 gele blokjes die genummerd zijn van 1 tot en met 2017. Simon wil zijn 4034 blokjes op een rij leggen. Hij wil dat zó doen dat voor elke $k = 1, 2, \dots, 2017$ aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- links van het blauwe blokje met nummer k liggen k of meer gele blokjes;
- rechts van het gele blokje met nummer k liggen k of minder blauwe blokjes.

Bepaal alle mogelijke nummers van het 1000e blokje van links in de rij.

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op.

Met gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. Van elk van de volgende vijf soorten tegels heb je er 1000 beschikbaar:

$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ & A & \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ & B & \\ 1 & 1 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & C & \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ & D & \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ & E & \\ 0 & 1 & \end{array}$
--	--	--	--	--

Je wilt een aantal tegels naast elkaar leggen zó dat je boven en onder precies dezelfde rij nullen en enen hebt; we noemen dit een *geslaagde combinatie*. Leg je bijvoorbeeld de combinatie ‘DDC’ bestaande uit drie tegels van achtereenvolgens type D, D en C, dan krijg je boven 1001001 en onder 010010101. Deze rijtjes zijn niet gelijk, dus deze combinatie is niet geslaagd.

- Maak met alleen tegels van type A, B en C een geslaagde combinatie.
- Toon aan dat er geen geslaagde combinatie bestaat met alleen tegels van type B, C en D.
- Is er een geslaagde combinatie met alleen tegels van type B, C, D en E?
Zo ja, geef een voorbeeld. Zo nee, bewijs dat zo’n combinatie niet bestaat.

C2. Een *kwadraatplakgetal* is een getal dat je krijgt door twee of meer kwadraten van elk twee cijfers achter elkaar te zetten. (Een getal van twee cijfers mag niet met een 0 beginnen.) Omdat bijvoorbeeld 16 en 25 kwadraten zijn, is 1625 een kwadraatplakgetal.

- Bepaal alle kwadraatplakgetallen van vier cijfers waarvan het eerste en vierde cijfer gelijk zijn.
- Bepaal alle kwadraatplakgetallen van zes cijfers die zelf een kwadraat zijn.